# BAB III

# INTEGRAL MCSHANE DI RUANG EUCLID $\mathbb{R}$

## 3.1 Sifat-sifat Integral Mcshane Pada Ruang Euclid $\mathbb{R}$

Pada bab sebelumnya telah dibahas konsep-konsep dasar dari analisis real. Konsep-konsep tersebut merupakan salah satu teori pendukung dari pembuktian sifat-sifat fungsi yang terintegralkan Mcshane pada ruang Euclid $\mathbb{R}$ . Pada bab ini akan dipelajari tentang definisi Integral Mcshane beserta sifat-sifatnya. Selanjutnya ditunjukkan sifat-sifat kekonvergenan dari Integral Mcshane.

Sebelum mendefinisikan suatu fungsi terintegral Mcshane, akan didefinisikan dulu apa yang dimaksud dengan partisi berlabel, partisi bebas berlabel (partisi Mcshane), dan operator linear pada penjumlahan fungsi.

Jika $I=[a,b]$ adalah interval tertutup dan terbatas di $\mathbb{R}$ , maka partisi dari $I$ adalah berhingga. Misalkan $P=(x_0,x_1,x_2,...,x_n)$ dimana $x_i \in I, i=1,2,...,n$ sedemikian sehingga

$$a=x_0<x_1<...<x_n=b$$

Titik-titik di $P$ digunakan untuk membagi interval $I=[a,b]$ menjadi subinterval yang tak saling tumpang tindih. Selanjutnya, akan dinotasikan partisi $P=\{[x_{i-1},x_i]\}_{i=1}^{n}$ dan didefinisikan norm $P$, yakni $\|P\|=maks\{[x_{i-1},x_i]\}_{i=1}^{n}$.

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
PERPUSTAKAAN

Jika titik $t_i$ diambil sebarang dari setiap subinterval $I_i = [x_{i-1}, x_i], i \leq n$ atau dengan kata lain $t_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i], i \leq n$, maka $t_i$ disebut label dari subinterval $I_i$ dan himpunan $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ disebut partisi berlabel dari interval $[a,b]$.

Sekarang, akan didefinisikan partisi bebas berlabel atau disebut juga partisi Mcshane.

***Definisi 3.1.1 Partisi Bebas Berlabel (Partisi Mcshane)***

*Partisi Mcshane dari interval* $[a,b]$ *adalah koleksi berhingga* $D = \{([c_i, d_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ *sedemikian sehingga* $\{[c_i, d_i], i \leq n\}$ *adalah koleksi subinterval dari interval* $[a,b]$ *yang menutupi (covering)* $[a,b]$ *dan* $t_i \in [a,b], i \leq n$.

Jika $D = \{([c_i, d_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah partisi bebas berlabel dari interval $[a,b]$, maka didefinisikan $f(D) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(d_i - c_i)$. Pada pembahasan integral Mcshane ini, didefinisikan penjumlahan dua buah fungsi $f$ dan $g$ sebagai berikut:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \text{ setiap } t \in [a,b]$$

diperoleh;

$$\begin{aligned}(f+g)(D) &= \sum_{i=1}^{n} (f+g)(t_i)(d_i - c_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(f(t_i) + g(t_i)\big)(d_i - c_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(d_i - c_i) + \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(d_i - c_i) = f(D) + g(D)\end{aligned}$$

Setelah mendefinisikan beberapa konsep dasar yang digunakan dalam pendefinisian integral Mcshane. Selanjutnya, akan didefinisikan integral Mcshane secara konstruktif

***Definisi 3.1.2***

*Fungsi* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$ *jika terdapat* $L\in\mathbb{R}$ *dengan sifat; untuk setiap* $\varepsilon>0$ *, terdapat fungsi* $\delta>0$ *pada interval* $[a,b]$ *maka berlaku* $\left|f(D)-L\right|<\varepsilon$ *dimana* $D$ *adalah partisi bebas berlabel pada interval* $[a,b]$ *yang subordinat ke* $\delta$.

Selanjutnya, $L$ dikatakan integral dari fungsi $f$ pada interval $[a,b]$ atau ditulis juga $L=(M)\int_a^b f$ dan $M[a,b]$ menyatakan himpunan dari fungsi-fungsi yang terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$.

***Teorema 3.1.3***

*Jika* $f\in M[a,b]$, *maka integralnya tunggal.*

***Bukti:***

Misalkan $L_1$ dan $L_2$ adalah integral dari fungsi $f$, akan ditunjukkan $L_1=L_2$. Karena $L_1$ adalah integral dari fungsi $f$ pada interval $[a,b]$, untuk setiap $\varepsilon>0$, terdapat fungsi $\delta_1>0$ pada interval $[a,b]$ sedemikian sehingga

$$\left|f(D_1)-L_1\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

dimana $D_1$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta_1$.

Begitu juga, $L_1$ adalah integral dari fungsi $f$ pada interval $[a,b]$, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi $\delta_2 > 0$ pada interval $[a,b]$ sedemikian sehingga

$$\left| f(D_2) - L_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dimana $D_2$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta_2$.

Perhatikan bahwa:

Pilih $\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Jika $D$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$, maka;

$$\left|L_1 - L_1\right| = \left|L_1 - f(D) + f(D) - L_2\right| \le \left| f(D) - L_1\right| + \left| f(D) - L_2\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Berdasarkan Teorema 2.1.1 , diperoleh $L_1 - L_2 = 0 \Leftrightarrow L_1 = L_2$.

***Teorema 3.1.4***

*Misalkan $f$ dan $g$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$, maka;*

i. *$kf$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$ dan $(M)\int_a^b kf = k(M)\int_a^b f$, setiap $k \in \mathbb{R}$.*

ii. *$f+g$ terintergal Mcshane pada interval $[a,b]$ dan $(M)\int_a^b f+g = (M)\int_a^b f + (M)\int_a^b g$ ; dan*

iii. *Jika $f(x) \le g(x)$, setiap $x \in [a,b]$ maka $(M)\int_a^b f \le (M)\int_a^b g$.*

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA PERPUSTAKAAN

**Bukti:**

i. Kasus I: untuk $k \neq 0$

Karena $f \in M[a,b]$ maka setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi $\delta > 0$ pada interval $[a,b]$ sedemikian sehingga $\left| f(D) - \int_a^b f \right| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$ dimana $D$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$.

Perhatikan bahwa:

$$\left| kf(D) - k\int_a^b f \right| = \left| k\left( f(D) - \int_a^b f \right) \right| = |k| \left| f(D) - \int_a^b f \right| < |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

Kasus II: untuk $k = 0$

Perhatikan bahwa:

$\left| kf(D) - k\int_a^b f \right| = \left| k\left( f(D) - \int_a^b f \right) \right| = |0| \left| f(D) - \int_a^b f \right| = 0 < \varepsilon$ selalu di penuhi untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Berdasarkan kasus I dan II, pilih $A = k\int_a^b f \in \mathbb{R}$. Karena terdapat $A \in \mathbb{R}$ dengan sifat; untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi $\delta > 0$ pada interval $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $D$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$, berlaku $\left| kf(D) - k\int_a^b f \right| < \varepsilon$.

Artinya $kf \in M[a,b]$ dan $(M)\int_a^b kf = k(M)\int_a^b f$, setiap $k \in \mathbb{R}$.

ii. Akan dibuktikan $f+g \in M[a,b]$ dan $(M)\int_a^b f+g=(M)\int_a^b f+(M)\int_a^b g$

Karena $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$, maka untuk setiap $\varepsilon>0$, terdapat fungsi $\delta_1>0$ pada interval $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $D_1$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta_1$, berlaku $\left|f(D_1)-\int_a^b f\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

Begitu juga, $g$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$, maka untuk setiap $\varepsilon>0$, terdapat fungsi $\delta_2>0$ pada interval $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $D_2$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta_2$, berlaku $\left|g(D_2)-\int_a^b g\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

Perhatikan bahwa:

Pilih $\delta(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$ untuk setiap $x\in[a,b]$. Jika $D$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$, maka setiap $\varepsilon>0$ berlaku;

$$\left|(f+g)(D)-\left(\int_a^b f+\int_a^b g\right)\right|=\left|f(D)+g(D)-\int_a^b f-\int_a^b g\right|$$
$$\leq\left|f(D)-\int_a^b f\right|+\left|g(D)-\int_a^b g\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Artinya $f+g\in M[a,b]$ dan $\int_a^b f+g=\int_a^b f+\int_a^b g$.

iii. Jika $f(x)\leq g(x)$, setiap $x\in[a,b]$ maka akan dibuktikan $(M)\int_a^b f\leq(M)\int_a^b g$.

Karena $f(x)\leq g(x)$ setiap $x\in[a,b]$ maka $f(D)\leq g(D)$.

Perhatikan bahwa:

Fungsi $f$ dan $g$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$, maka setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi $\delta > 0$ pada interval $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $D$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$, berlaku $\left| f(D) - \int_a^b f \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\left| g(D) - \int_a^b g \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Akabitnya kita peroleh;

$-\frac{\varepsilon}{2} < f(D) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}$ ..........(*)

$-\frac{\varepsilon}{2} < g(D) - \int_a^b g < \frac{\varepsilon}{2}$ ...........(**)

Dari (*) dan (**) maka diperoleh;

$-\frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f < f(D) \leq g(D) < \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2}$ sehingga didapat

$\int_a^b f < \int_a^b g + \varepsilon$ maka berdasarkan Teorema 2.1.2 diperoleh $(M)\int_a^b f \leq (M)\int_a^b g$

***Teorema 3.1.5***

*Misalkan fungsi* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *dan* $c \in (a,b)$. *Jika fungsi* $f$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,c]$ *dan* $[c,b]$ *maka* $f$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$ *dan* $(M)\int_a^b f = (M)\int_a^c f + (M)\int_c^b f$ .

***Bukti:***

Karena $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,c]$, maka berdasarkan Definisi 3.1.2 diperoleh untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi $\delta_1 > 0$ pada interval $[a,c]$ sedemikian sehingga $\left| f(D_1) - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ dimana $D_1$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,c]$ yang subordinat ke $\delta_1$. Begitu juga, $f$ terintegral Mcshane pada interval $[c,b]$ maka terdapat fungsi $\delta_2 > 0$ pada interval $[c,b]$ sedemikian sehingga $\left| f(D_2) - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ dimana $D_2$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[c,b]$ yang subordinat ke $\delta_2$. Definisikan $\delta$ pada interval $[a,b]$ sebagai berikut;

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\left\{ \delta_1(x), \frac{1}{2}(c-x) \right\}, \textit{ jika } & a \le x < c \\ \min\{\delta_1(c), \delta_2(c)\} \quad , \textit{ jika } & x = c \\ \min\left\{ \delta_2(x), \frac{1}{2}(x-c) \right\}, \textit{ jika } & c < x \le b \end{cases}$$

Misalkan $D$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ akan ditunjukkan terdapat partisi $D_1$ pada interval $[a,c]$ yang subordinat ke $\delta_1$ dan $D_2$ partisi bebas berlabel pada interval $[c,b]$ yang subordinat ke $\delta_2$ sedemikian sehingga $f(D) = f(D_1) + f(D_2)$.

Kasus I:

Jika $c$ adalah titik partisi dari $D$, maka $c$ akan termuat ke dalam dua subinterval dari D yaitu $[a,c]$ dan $[c,b]$ dimana pilih $c$ sebagai label dari kedua subinterval. Karena $D_1$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,c]$ yang subordinat ke $\delta_1$ maka jelas $D_1$ subordinat ke $\delta$. Begitu juga dengan $D_2$ partisi bebas berlabel pada interval $[c,b]$ yang subordinat ke $\delta_2$ maka jelas $D$ subordinat ke $\delta$ dan $f(D)$ bisa dinyatakan $f(D)=f(D_1)+f(D_2)$.

Kasus II:

Jika $c$ bukan partisi dari $D=\{(I_i,t_i)\}_{i=1}^{m}$ maka c adalah label dari beberapa subinterval , katakan label dari subinterval $[x_{k-1},x_k]$. Tempatkan titik c pada dua pasangan subinterval $([x_{k-1},c],c)$ dan $([c,x_k],c)$, dimana $D_1$ dan $D_2$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,c]$ dan $[c,b]$. Karena $f(c)(x_k-x_{k-1})=f(c)(c-x_{k-1})+f(c)(x_k-c)$ maka jelas $D_1$ dan $D_2$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,c]$ dan $[c,b]$ subordinat ke $\delta$ dan $f(D)$ bisa dinyatakan $f(D)=f(D_1)+f(D_2)$.

Oleh karena itu, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\left|f(D)-\left(\int_a^c f+\int_c^b f\right)\right| &= \left|f(D_1)+f(D_2)-\int_a^c f-\int_c^b f\right| \\ &\leq \left|f(D_1)-\int_a^c f\right|+\left|f(D_2)-\int_c^b f\right| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon\end{aligned}$$

Jadi, berdasarkan Definisi 3.1.2 $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$ dan

$$(M)\int_a^b f=(M)\int_a^c f+(M)\int_c^b f$$

Selanjutnya, akan dijelaskan teorema untuk menentukan apakah suatu fungsi terintegral Mcshane tanpa harus mencari integralnya. Teorema ini dikenal sebagai Kriteria Cauchy

***Teorema 3.1.6***

*Fungsi* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon>0$ , *terdapat fungsi* $\delta>0$ *pada interval* $[a,b]$ *sedemikian sehingga* $\left|f(D_1)-f(D_2)\right|<\varepsilon$ *dimana* $D_1$ *dan* $D_2$ *adalah partisi bebas berlabel pada interval* $[a,b]$ *yang subordinat ke* $\delta$ .

**Bukti:**

$(\Rightarrow)$ $f\in M[a,b]$ maka akan dibuktikan setiap $\varepsilon>0$, terdapat fungsi $\delta>0$ pada interval $[a,b]$ sedemikian sehingga $\left|f(D_1)-f(D_2)\right|<\varepsilon$ dimana $D_1$ dan $D_2$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$ .

Karena $f\in M[a,b]$ maka untuk $\varepsilon>0$, terdapat fungsi $\delta_1>0$ dan $\delta_2>0$ pada interval $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $D_1$ dan $D_2$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta_1$ dan $\delta_2$ maka berlaku;

$$\left|f(D_1)-\int_a^b f\right|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \left|f(D_2)-\int_a^b f\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Perhatikan bahwa:

Untuk setiap $\varepsilon>0$ pilih $\delta(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$ dimana $x\in[a,b]$, maka;

$$\begin{aligned}\left|f(D_1)-f(D_2)\right| &= \left|f(D_1)-\int_a^b f+\int_a^b f-f(D_2)\right| \\ &\leq \left|f(D_1)-\int_a^b f\right|+\left|f(D_2)-\int_a^b f\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

Dimana $D_1$ dan $D_2$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$ .

$(\Leftarrow)$ Jika setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi $\delta > 0$ pada interval $[a,b]$ sedemikian sehingga $\left| f(D_1) - f(D_2) \right| < \varepsilon$ dimana $D_1$ dan $D_2$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$ maka akan dibuktikan $f \in M[a,b]$ .

Misalkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ ,terdapat $\delta_n > 0$ sedemikian sehingga jika $D_1$ dan $D_2$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$ berlaku $\left| f(D_1) - f(D_2) \right| < \dfrac{1}{n}$.

Sekarang untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ , misalkan $D_n$ dan $D_m$ adalah partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta$ maka $\left| f(D_n) - f(D_m) \right| < \dfrac{1}{n}$, setiap $m \in \mathbb{N}$ . Jika $m > n$ maka $\{ f(D_m) \}_{m=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ . Akibatnya, $\{ f(D_m) \}_{m=1}^{\infty}$ konvergen, misalkan konvergen ke $B \in \mathbb{R}$ . Jadi, $\lim_{m \to \infty} f(D_m) = B$ . Sehingga, ketika $m \to \infty$ maka $\left| f(D_m) - B \right| < \dfrac{1}{m}$.

$\therefore$ berarti terdapat $B \in \mathbb{R}$ , dimana untuk setiap $\varepsilon > 0$ (pilih $k > \dfrac{2}{\varepsilon}, k \in \mathbb{N}$ ) dan diketahui terdapat fungsi $\delta > 0$ sehingga;

$$\begin{aligned} \left| f(D) - B \right| &= \left| f(D) - f(D_k) + f(D_k) - B \right| \\ &\leq \left| f(D_k) - f(D) \right| + \left| f(D_k) - B \right| < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} < \varepsilon \end{aligned}$$

dimana $D$ adalah sebarang partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta$ .

$B$ adalah suatu integral Mcshane pada interval $[a,b]$ ,tulis $B = \int_a^b f$ . Maka berdasarkan Definisi 3.1.2, diperoleh $f \in M[a,b]$ .



UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
PERPUSTAKAAN

***Lemma 3.1.7 (Lemma Saks-Henstock)***

*Misalkan* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$ *dan* $F(x)=\int_a^x f$ *,setiap* $x\in[a,b]$ *. Misalkan pula untuk setiap* $\varepsilon>0$ *terdapat fungsi positif* $\delta$ *pada interval* $[a,b]$ *sedemikian sehingga* $|f(D)-F(D)|<\varepsilon$ *dimana D adalah partisi bebas berlabel pada interval* $[a,b]$ *yang subordinat ke* $\delta$*. Jika* $D_o=\{(x_i,[c_i,d_i]:1\le i\le n\}$ *adalah sebarang koleksi dari interval bebas berlabel dan tidak saling tumpang tindih yang subordinat ke* $\delta$*, maka* $|f(D_o)-F(D_o)|<\varepsilon$ *dan* $\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)(d_i-c_i)-(F(d_i)-F(c_i))|\le\varepsilon$ *.*

**Bukti**

i. Akan dibuktikan $|f(D_o)-F(D_o)|<\varepsilon$

Misalkan $\{K_j:1\le j\le m\}$ adalah koleksi interval tertutup pada interval $[a,b]$ yang berbatasan dengan interval dari $D_o$ . Untuk setiap $\varepsilon>0$ , misalkan $D_j$ adalah partisi berlabel dari $K_j$ yang subordinat ke $\delta$, untuk setiap $j$ dan memenuhi $|f(D_j)-F(K_j)|<\dfrac{\varepsilon}{2m}$. Misalkan $D=\bigcup_{j=0}^{m}D_j$ , maka $D$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$.

Perhatikan bahwa:

Karena $|f(D)-F(D)|<\frac{1}{2}\varepsilon$ dan $D=\bigcup_{j=0}^{m}D_j$ diperoleh;

$$\left|f(D_o)-F(D_o)\right|=\left|f(D_o)-\left(\sum_{j=1}^{m}\left(F(K_j)-f(D_j)\right)\right)+\left(\sum_{j=1}^{m}\left(F(K_j)-f(D_j)\right)\right)-F(D_o)\right|$$

$$=\left|f(D_o)+\sum_{j=1}^{m}f(D_j)-F(D_o)-\sum_{j=1}^{m}F(K_j)+\left(\sum_{j=1}^{m}\left(F(K_j)-f(D_j)\right)\right)\right|$$

$$\leq\left|f(D_o)+\sum_{j=1}^{m}f(D_j)-F(D_o)-\sum_{j=1}^{m}F(K_j)\right|+\left|\sum_{j=1}^{m}\left(F(K_j)-f(D_j)\right)\right|$$

$$=\left|f(D)-F(D)\right|+\left|\sum_{j=1}^{m}\left(F(K_j)-f(D_j)\right)\right|$$

$$\leq\left|f(D)-F(D)\right|+\sum_{j=1}^{m}\left|F(K_j)-f(D_j)\right|<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

ii. Akan dibuktikan $\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)(d_i-c_i)-(F(d_i)-F(c_i))\right|\leq\varepsilon$

a) Kasus I: untuk $f(x_i)(d_i-c_i)\leq(F(d_i)-F(c_i)), i\leq n$ , diperoleh;

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)(d_i-c_i)-(F(d_i)-F(c_i))\right|=\sum_{i=1}^{n}\left(F(d_i)-F(c_i)-f(x_i)(d_i-c_i)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(F(d_i)-F(c_i))-\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(d_i-c_i)$$

$$=F(D_o)-f(D_o)\leq\left|F(D_o)-f(D_o)\right|<\varepsilon$$

b) Kasus II: untuk $f(x_i)(d_i-c_i)>(F(d_i)-F(c_i)), i\leq n$ , diperoleh;

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)(d_i-c_i)-(F(d_i)-F(c_i))\right|=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)(d_i-c_i)-F(d_i)-F(c_i))$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(d_i-c_i)-\sum_{i=1}^{n}(F(d_i)-F(c_i))$$

$$=f(D_o)-F(D_o)\leq\left|f(D_o)-F(D_o)\right|<\varepsilon$$

Dari kedua kasus, terbukti bahwa $\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)(d_i-c_i)-(F(d_i)-F(c_i))\right|\leq\varepsilon$

***Lemma 3.1.8***

*Misalkan* $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$. *Jika* $\{(x_i,I_i):1\le i\le N\}$ *dan* $\{(x_j,K_j):1\le j\le M\}$ *adalah partisi bebas berlabel pada interval* $[a,b]$ *yang subordinat ke* $\delta$, *maka* $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left|f(x_i)-f(y_i)\right|\mu(I_i\cap K_j)<2\varepsilon$.

**Bukti:**

Interval tak turun dari koleksi bentuk partisi $\{I_i\cap K_j:1\le i\le N,1\le j\le M\}$ dari interval $[a,b]$. Gunakan interval ini, kita bentuk dua partisi bebas berlabel $D_1$ dan $D_2$ dari interval $[a,b]$ yang mengikuti:

Jika $f(x_i)\ge f(y_j)$, maka tempatkan $\left(x_i,I_i\cap K_j\right)$ di $D_1$ dan $\left(y_j,I_i\cap K_j\right)$ di $D_2$

Jika $f(x_i)<f(y_j)$, maka tempatkan $\left(y_j,I_i\cap K_j\right)$ di $D_1$ dan $\left(x_i,I_i\cap K_j\right)$ di $D_2$

Catatan bahwa:

$$f(D_1)-f(D_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{M}\left|f(x_i)-f(y_j)\right|\mu(I_i\cap K_j)$$

Karena $D_1$ dan $D_2$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$ dan $f\in M[a,b]$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
f(D_1)-f(D_2) &\le \left|f(D_1)-f(D_2)\right| \\
&= \left|f(D_1)-\int_a^b f+\int_a^b f-f(D_2)\right| \\
&\le \left|f(D_1)-\int_a^b f\right|+\left|\int_a^b f-f(D_2)\right|<2\varepsilon
\end{aligned}$$

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
PERPUSTAKAAN

***Teorema 3.1.9***

*Jika* $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$, *maka* $|f|$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$ *dan* $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$

**Bukti:**

Karena $f \in M[a,b]$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta > 0$ pada interval $[a,b]$ sedemikian sehingga $\left|f(D)-\int_a^b f\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$ dimana D adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$. Akan dibuktikan $|f|$ memenuhi Kriteria Cauchy untuk integral Mcshane. Misalkan $D_1 = \{(x_i, I_i):1\le i\le N\}$ dan $D_2 = \{(y_j, K_j):1\le j\le M\}$ adalah partisi bebas berlabel dari interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$.

Berdasarkan Lemma 3.1.8, maka diperoleh;

$$\begin{aligned}\big||f|(D_1)-|f|(D_2)\big| &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\big||f(x_i)|-|f(y_i)|\big|\mu(I_i\cap K_j)\\ &\le \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|f(x_i)-f(y_i)|\mu(I_i\cap K_j) < 2\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)=\varepsilon\end{aligned}$$

Terbukti, $|f|$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$.

Sekarang akan dibuktikan $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

Perhatikan bahwa:

Karena $|f|\le|f|$, maka $f\le|f|$ dan $-|f|\le f$. Berdasarkan Teorema 3.1.4 diperoleh $-\int_a^b |f| \le \int_a^b f$ dan $\int_a^b f \le \int_a^b |f|$.

Akibatnya, diperoleh $-\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|$. Berdasarkan sifat nilai mutlak, diperoleh

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

Sekarang akan dijelaskan definisi suatu fungsi dikatakan hampir dimana-mana (*h.d*) yang akan bermanfaat pada pembahasan selanjutnya.

***Definisi 3.1.10 (Almost everywhere / hampir dimana-mana)***

*Proposisi P(x) dikatakan hampir dimana–mana pada himpunan* $E$ *jika sifat P(x) berlaku pada himpunan* $E$ *kecuali pada himpunan bagian* $E$ yang *berukuran nol.*

Selanjutnya akan didefinisikan fungsi primitif dari fungsi $f$.

***Definisi 3.1.11***

*Misalkan fungsi* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$, *dan misalkan pula* $F(x)=\int_a^x f$ , *untuk setiap* $x\in[a,b]$ *maka* $F$ *disebut fungsi primitive-M pada interval* $[a,b]$.

***Teorema 3.1.12***

*Misalkan* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$ *dan* $F$ *adalah fungsi primitif pada interval* $[a,b]$ *maka* $F$ *kontinu mutlak pada interval* $[a,b]$ *dan* $F'(x)=f(x)$ *h.d pada interval* $[a,b]$.

**Bukti:**

Karena $f \in M[a,b]$, diperoleh untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi $\delta > 0$ pada interval $[a,b]$ sedemikian sehingga $\left| f(D) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$ dimana $D$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$.

Untuk $f(x) = 0$ setiap $x \in [a,b]$ jelas. Sekarang untuk $f(x) \neq 0$ setiap $x \in [a,b]$, ambil fix partisi bebas berlabel $D_o = \{(x_i,[a_i,b_i]) : 1 \le i \le n\}$ pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$ dan misalkan $M = \max\{|f(x_i)| : 1 \le i \le n\}$. Pilih $\eta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ dan misalkan pula $\{[c_j,d_j] : 1 \le j \le p\}$ adalah koleksi berhingga interval tidak tumpang tindih dari $[a,b]$ sedemikian sehingga $\sum_{j=1}^{p}(d_j - c_j) < \eta$. Dengan membagi lagi interval ini (jika diperlukan), jika diasumsikan untuk setiap *j* maka $[c_j,d_j] \subseteq [a_i,b_i]$, untuk beberapa *i*.

Misalkan $\pi_i = \{ j : [c_j,d_j] \subseteq [a_i,b_i] \}$ untuk setiap *i* dan $D = \bigcup_{i=1}^{n} \{ (x_i : [c_j,d_j]) : j \in \pi_i \}$. Diketahui pula, bahwa $D$ adalah partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta$. Dengan memanfaatkan Lemma 3.1.7 (Lemma Saks-Henstock), diperoleh:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{n} (F(d_j) - F(c_j)) \right| &= |F(D)| = |F(D) - f(D) + f(D)| \\
&\le |F(D) - f(D)| + |f(D)| \\
&\le \varepsilon + M\mu(D) < 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.6.1 , $F$ kontinu mutlak pada interval $[a,b]$ .

***Teorema 3.1.13***

Misalkan $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ adalah kontinu pada interval $[a,b]$, maka $g$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$ dan $(M)\int_a^b g=(R)\int_a^b g$.

Bukti:

Diketahui $g$ kontinu pada interval $[a,b]$, berdasarkan Teorema 2.8.5 g terintegral Riemann pada interval $[a,b]$, akibatnya untuk setiap $\varepsilon>0$, terdapat fungsi konstan $\delta_1>0$ pada interval $[a,b]$ sedemikian sehingga $\left|g(P)-(R)\int_a^b g\right|<\varepsilon$, dimana $P$ adalah partisi berlabel yang subordinat ke $\delta_1$. Karena $g$ kontinu pada interval $[a,b]$ maka $g$ kontinu seragam. Berdasarkan Definisi 2.4.8, untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\eta>0$ jika $x,y\in[a,b]$ dan $|y-x|<\eta$ berlaku $|g(y)-g(x)|<\varepsilon$.

Pilih $\delta(x)=\min\left\{\eta,\frac{\delta_1(x)}{2}\right\}$, untuk setiap $x\in[a,b]$. Misalkan $D=\{(x_i,[c_i,d_i]):1\le i\le q\}$ adalah partisi bebas berlabel pada $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$ dan misalkan pula $P=\{(c_i,[c_i,d_i]):1\le i\le q\}$, jelas $P$ adalah partisi berlabel yang subordinat ke $\delta_1$.

Sekarang, perhatikan bahwa:

$$\left|g(D)-(R)\int_a^b g\right|=\left|g(D)-g(P)+g(P)-(R)\int_a^b g\right|$$

$$\le|g(D)-g(P)|+\left|g(P)-(R)\int_a^b g\right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{q} g(x_i)(d_i - c_i) - \sum_{i=1}^{q} g(c_i)(d_i - c_i) \right| + \left| g(P) - (R)\int_a^b g \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{q} \big( g(x_i) - g(c_i) \big)(d_i - c_i) \right| + \left| g(P) - (R)\int_a^b g \right|$$

$$< \sum_{i=1}^{q} \left| g(x_i) - g(c_i) \right| (d_i - c_i) + \varepsilon < \sum_{i=1}^{q} \varepsilon (d_i - c_i) + \varepsilon = \varepsilon (b-a) + \varepsilon$$

Hal ini menunjukkan bahwa $g$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$ dan $\int_a^b g = (R)\int_a^b g$.

***Lemma 3.1.14***

*Misalkan $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Fungsi $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(y_i) \right| (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$ dimana $D_1 = \{ (I_i, x_i) : i \le n \}$ dan $D_2 = \{ (K_i, y_i) : i \le n \}$ adalah partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta$.*

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Jika $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ dan $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$, maka akan dibuktikan untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(y_i) \right| (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$ dimana $D_1 = \{ (I_i, x_i) : i \le n \}$ dan $D_2 = \{ (K_i, y_i) : i \le n \}$ adalah partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta$.

Karena $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$, maka berdasarkan Teorema 3.1.6 untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat terdapat fungsi $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\left|f(D_1)-f(D_2)\right|<\varepsilon$, dimana $D_1$ dan $D_2$ adalah partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta$.

Misalkan, terdapat $0\le k\le n$ sedemikian sehingga $f(x_i)<f(y_i), i\le n$

Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(y_i)\right|(x_i-x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{k}\left|f(x_i)-f(y_i)\right|(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=k+1}^{n}\left|f(x_i)-f(y_i)\right|(x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(f(y_i)-f(x_i)\right)(x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1}) \\
&\le \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i-x_{i-1})\right| \\
&= \left|f(D_1)-(D_2)\right|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

Untuk kasus $f(x_i)>f(y_i), i\le n$ dapat dilakukan dengan proses yang sama seperti di atas. Jadi, terbukti bahwa $\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(y_i)\right|(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$.

($\Leftarrow$) Jika untuk setiap $\varepsilon>0$, terdapat terdapat fungsi $\delta>0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(y_i)\right|(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$ dimana $D_1=\{(I_i,x_i): i\le n\}$ dan $D_2=\{(K_i,y_i): i\le n\}$ adalah partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta$, akan dibuktikan $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$.

**Bukti:**

Diketahui untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)|(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$ dimana $D_1 = \{(I_i, x_i) : i \le n\}$ dan $D_2 = \{(K_i, y_i) : i \le n\}$ adalah partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta$.

Misalkan, terdapat $0 \le k \le n$ sedemikian sehingga $f(x_i) < f(y_i), i \le k$ dan $f(x_i) \ge f(y_i), k+1 \le i \le n$, maka

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)|(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(y_i)|(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)|(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) - f(y_i))(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} (f(x_i) - f(y_i))(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\le \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\
&= |f(D_1) - (D_2)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 3.1.6, maka $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$

***Teorema 3.1.15***

*Jika $f, g \in M[a,b]$ dimana $f$ dan $g$ terbatas pada interval $[a,b]$, maka $fg \in M[a,b]$*

**Bukti:**

Diketahui $f$ dan $g$ terbatas pada interval $[a,b]$ maka terdapat $M, N \in \mathbb{R}^+$ sedemikian sehingga $|f(x)| \le M$ dan $|g(x)| \le N$, untuk setiap $x \in [a,b]$. Karena $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$, berdasarkan Definisi 3.1.2, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)|(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2N}$, dimana $D_1^{'} = \{(I_i, x_i) : i \le n\}$ dan $D_1^{''} = \{(K_i, y_i) : i \le n\}$ adalah partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta_1$. Begitu juga $g$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$, terdapat fungsi $\delta_2 > 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(y_i)|(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2M}$, dimana $D_2^{'} = \{(A_i, x_i) : i \le n\}$ dan $D_2^{''} = \{(B_i, y_i) : i \le n\}$ adalah partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta_2$.

Perhatikan bahwa:

Pilih $\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Jika $D = \{(D_i, x_i) : i \le n\}$ dan $Q = \{(Q_i, y_i) : i \le n\}$ adalah partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta$, maka;

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - f(y_i)g(y_i)|(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - g(x_i)f(y_i) + g(x_i)f(y_i) - f(y_i)g(y_i)|(x_i - x_{i-1})$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - g(x_i)f(y_i)|(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} |g(x_i)f(y_i) - f(y_i)g(y_i)|(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |g(x_i)||f(x_i) - f(y_i)|(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} |f(y_i)||g(x_i) - g(y_i)|(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} N|f(x_i) - f(y_i)|(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} M|g(x_i) - g(y_i)|(x_i - x_{i-1})$$

$$< N\frac{\varepsilon}{2N} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

Berdasarkan Lemma 3.1.14 terbukti $fg \in M[a,b]$

***Teorema 3.1.16***

*Jika* $f, g \in M[a,b]$, *maka* $\text{maks}\{f, g\}$ *dan* $\min\{f, g\}$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$.

**Bukti:**

Berdasarkan Teorema 2.1.3, $\text{maks}\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ dan $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.

Dengan memanfaatkan Teorema 3.14 dan 3.1.9 terbukti bahwa $\text{maks}\{f, g\}$ dan $\min\{f, g\}$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$.

Sekarang, jika $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi dan didefinisikan $f^- = \text{maks}\{-f, 0\}$ dan $f^+ = \text{maks}\{f, 0\}$ maka dengan memanfaatkan Teorema 2.1.3 mudah untuk membuktikan bahwa $f = f^+ - f^-$ dan $|f| = f^+ + f^-$

***Teorema 3.1.17***

*Fungsi* $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$ *jika dan hanya jika* $f^{+}$ *dan* $f^{-}$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$.

**Bukti:**

Berdasarkan Teorema 3.1.6**,** terbukti bahwa $f^{+}$ dan $f^{-}$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$. Begitu pula jika $f^{+}$ dan $f^{-}$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$ , dengan memanfaatkan Teorema 3.1.4 terbukti bahwa $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$.

***Teorema 3.1.18***

*Fungsi* $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$ *jika dan hanya jika* $|f|$ *dan* $f^{+}$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$.

**Contoh:** Fungsi terintegral Mcshane:

Fungsi $f:[0,1]\rightarrow \mathbb{R}$ dimana didefinisikan;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in \mathbb{Q}\\ 1, & x\in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\end{cases} \quad ,\textit{untuk setiap } x\in[0,1].$$

Maka akan dibuktikan $f$ terintegral Mcshane pada interval $[0,1]$ dan $\int_0^1 f=0$.

**Bukti:**

Dapat dienumerasikan seluruh bilangan rasional pada interval $[0,1]$ sedemikian sehingga bisa dinyatakan dalam bentuk $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$. Definisikan himpunan $A=\{r_i\in \mathbb{Q} : r_i\in[0,1]\}$ . Untuk sebarang $\varepsilon>0$ , definisikan $\delta_{\varepsilon}(r_k)=\dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}}$ dan

$\delta_\varepsilon(x)=1$, untuk $x \in \square \setminus \square \cap [0,1]$ untuk sebarang partisi bebas berlabel $D$ yang subordinat ke $\delta$ pada interval $[0,1]$. Jelas bahwa $\delta_\varepsilon$ adalah fungsi positif pada interval $[0,1]$. Karena $D$ yang subordinat ke $\delta$ pada interval $[0,1]$ maka diperoleh $0 < d_i - c_i < x_i + \delta_\varepsilon(x_i) - \left(x_i - \delta_\varepsilon(x_i)\right) = 2\delta_\varepsilon(x_i)$ . Perhatikan bahwa, untuk label $x_i \in \square \setminus \square$ maka $f(x_i)=0$. Jadi, yang menjadi perhatian kita adalah label $x_i \in \square$ . Akibatnya diperoleh;

$$0 < f(x_i)(d_i - c_i) < 1 \cdot (d_i - c_i) \le 2\delta_\varepsilon(x_i) = \frac{2\varepsilon}{2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(d_i - c_i) - 0\right| &= \left|\sum_{x\in A} f(x_i)(d_i - c_i) + \sum_{x\notin A} f(x_i)(d_i - c_i)\right| \\
&\le \left|\sum_{x\in A} f(x_i)(d_i - c_i)\right| + \left|\sum_{x\notin A} f(x_i)(d_i - c_i)\right| \\
&= \left|\sum_{x\in A} f(x_i)(d_i - c_i)\right| + 0 \\
&= \left|\sum_{x\in A} (d_i - c_i)\right| \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 3.1.2, $f$ terintegral Mcshane pada interval $[0,1]$ dan $\int_0^1 f = 0$.

**Contoh:** Fungsi Tidak Terintegral Mcshane

Misalkan $I_n = [2^{-n}, 2^{-n+1}]$ untuk setiap $n \in \square$ . Misalkan pula $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen kondisional (konvergen Mutlak Bersyarat) dan didefinisikan $f:[0,1] \to \square$ dimana

$$f(x) = \begin{cases} 2^n a_n & ,untuk\ x \in I_n^o \\ 0 & ,x\ lainnya \end{cases}$$

Akan dibuktikan $f$ tidak terintegral Mcshane pada interval $[0,1]$.

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
PERPUSTAKAAN

Bukti:

Telah ditunjukkan bahwa fungsi $f$ terintegral Henstock pada interval $[0,1]$ (Gordon, 1944:155). Akan dibuktikan secara langsung bahwa fungsi $f$ tidak terintegral Mcshane pada interval $[0,1]$. karena $f$ terintegral Henstock pada interval $[0,1]$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ,terdapat fungsi $\delta_1 > 0$ pada interval $[0,1]$ sedemikian sehingga $\left| f(P) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| < 1$ dimana $P$ adalah sebarang partisi berlabel yang subordinat ke $\delta_1$.

Misalkan $\delta$ adalah sebarang fungsi positif yang terdefinisi pada interval $[0,1]$ sedemikian sehingga $\delta < \delta_1$ . Untuk membuktikan $f$ tidak terintegral Mcshane pada interval $[0,1]$, akan dibuktikan terdapat partisi bebas berlabel $D$ pada interval $[0,1]$ yang subordinat ke $\delta$ sedemikian sehingga $\left| f(D) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \geq 1$.

Pilih bilangan bulat positif $N > 1$ sedemikian sehingga $2^{-N+1} < \delta(0)$ dan pilih bilangan bulat positif $M > N$ sedemikian sehingga $\sum_{n=N}^{M-1} |a_n| \geq 4$. Misakan;

$$\pi^+ = \{ n : N \leq n < M \ \ dan\ a_n \geq 0 \}$$

$$\pi^- = \{ n : N \leq n < M \ \ dan\ a_n < 0 \}$$

Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa $\sum_{n \in \pi^-} -a_n \geq 2$. Misalkan $P_1$ adalah partisi berlabel pada $[2^{-N+1}, 1]$ yang subordinat ke $\delta$. Untuk setiap $n \in \pi^+$, misalkan $P_n$ adalah partisi berlabel pada interval $I_n$ yang subordinat ke $\delta$ .

Sekarang konstruksi $P=\bigcup_{n\in\pi^+} P_n \bigcup P_1 \bigcup (0,[2^{-M+1}])$ dan $D=\bigcup_{n\in\pi^-}\{(0,I_n)\}\bigcup P$ .

Catatan bahwa $P$ adalah partisi berlabel yang subordinat ke $\delta$ dan $D$ partisi bebas berlabel pada interval $[0,1]$ yang subordinat ke $\delta$. Dengan memanfaatkan Lemma Saks-Henstock diperoleh:

$$\begin{aligned}\left|f(D)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right| &= \left|\sum_{n\in\pi^-}-a_n+f(P)-\sum_{n=1}^{N-1}a_n-\sum_{n\in\pi^+}a_n-\sum_{n=M}^{\infty}a_n\right|\\ &\geq \sum_{n\in\pi^-}-a_n-\left|f(P)-\sum_{n=1}^{N-1}a_n-\sum_{n\in\pi^+}a_n-\sum_{n=M}^{\infty}a_n\right|\\ &\geq 2-1=1\end{aligned}$$

Karena $\left|f(D)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|\geq 1$ dimana $D$ partisi bebas berlabel pada interval $[0,1]$ yang subordinat ke $\delta$, terbukti $f$ tidak terintegral Mcshane pada interval $[0,1]$.

**Lemma 3.1.19**

*Jika $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$ dengan $f(x)=c$ untuk setiap $x\in[a,b]$, maka* $\int_a^b f=c(b-a)$

Bukti:

Karena $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$, maka berdasarkan Definisi 3.1.2 diperoleh untuk setiap $\varepsilon>0$, terdapat fungsi $\delta>0$ pada interval $[a,b]$ dimana $D$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$, berlaku;

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_{i-1}-x_i)=\sum_{i=1}^{n} c(x_{i-1}-x_i)=c(b-a).$$

Hal ini menunjukkan, $\int_a^b c = c(b-a)$

**Teorema 3.1.20**

*Jika* $f$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$ *dan* $|f| \le c$, maka berlaku $\left|\int_a^b f\right| \le c(b-a)$.

**Bukti:**

Jika $|f| \le c$, maka $f \le c$ dan $-f \le c$. Berdasarkan Teorema 3.1.4 diperoleh ; $\int_a^b -f \le \int_a^b c$ jika dan hanya jika $-\int_a^b f \le \int_a^b c = c(b-a)$.

$\int_a^b f \le \int_a^b c$ jika dan hanya jika $\int_a^b f \le \int_a^b c = c(b-a)$.

Akibatnya, diperoleh $-c(b-a) \le \int_a^b f \le c(b-a)$. Berdasarkan sifat nilai mutlak, diperoleh $\left|\int_a^b f\right| \le c(b-a)$.

***Teorema 3.1.21***

*Fungsi* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *, dimana* $[c,d] \subseteq [a,b]$. *Jika* $f \in M[a,b]$ *maka* $f \in M[c,d]$

***Bukti:***

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, karena $f \in M[a,b]$, terdapat fungsi $\delta > 0$ sehingga untuk sebarang partisi bebas berlabel $D$ dan $E$ yang subordinat ke $\delta$ pada interval $[a,b]$, berlaku ;

$\left| f(D) - f(E) \right| < \varepsilon$.

Jika $[c,d] \subseteq [a,b]$, maka $[a,b] = [c,d] \cup \left( \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \right)$. Berdasarkan Lemma Causin, terdapat berturut-turut $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta$ pada interval $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\ldots,[a_n,b_n]$. Jika $D'$ dan $E'$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[c,d]$, maka

$D = D' \bigcup \left[ \bigcup_{i=1}^{n} D_i \right]$ dan $E = E' \bigcup \left[ \bigcup_{i=1}^{n} D_i \right]$ adalah partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta$ pada interval $[a,b]$, dimana berlaku;

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(d_i - c_i) = \sum_{x_i \in D'} f(x_i)(d_i - c_i) + \sum_{x_i \in D_i} f(x_i)(d_i - c_i)$, untuk $x_i$ label partisi $D$.

$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(d_i - c_i) = \sum_{t_i \in E'} f(t_i)(d_i - c_i) + \sum_{x_i \in D_i} f(x_i)(d_i - c_i)$, untuk $t_i$ label partisi $E$.

Dari kedua persamaan di atas, diperoleh;

$$
\begin{aligned}
\left|f(D')-f(E')\right| &= \left|\sum_{x_i\in D'} f(x_i)(d_i-c_i)-\sum_{x_i\in E'} f(x_i)(d_i-c_i)\right| \\
&= \left|\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(d_i-c_i)-\sum_{x_i\in D_i} f(x_i)(d_i-c_i)\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(d_i-c_i)-\sum_{x_i\in D_i} f(x_i)(d_i-c_i)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(d_i-c_i)-\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(d_i-c_i)\right| \\
&= \left|f(D)-f(E)\right|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

Jadi, berdasarkan Teorema 3.1.6 $f\in M[c,d]$

***Teorema 3.22 (Teorema Akibat)***

*Misalkan fungsi* $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ *dan* $c\in(a,b)$. *Fungsi* $f$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,c]$ *dan* $[c,b]$ *jika dan hanya jika* $f$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$.

**Bukti:**

Berdasarkan Teorema 3.1.5 jelas bahwa jika fungsi $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,c]$ dan $[c,b]$, maka $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$. Sekarang akan dibuktikan sebaliknya. Jika $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$ maka akan dibuktikan $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,c]$ dan $[c,b]$.

Berdasarkan Teorema 3.1.21 jika $f$ terintegral Mcshane pada interval [a,b] maka $f$ terintegral Mcshane pada setiap subinterval $[a,b]$. Perhatikan bahwa $[a,c]\subset[a,b]$ dan $[c,b]\subset[a,b]$ maka $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,c]$ dan $[c,b]$.

$\therefore$ Jadi, teorema terbukti.

***Teroema 3.1.23***

*Jika* $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ *dan* $f\in R[a,b]$, *maka* $f\in M[a,b]$

***Teorema 3.1.24***

*Jika* $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ *fungsi monoton, maka* $f$ *terintegral Mcshane* pada Interval $[a,b]$.

Bukti:

Karena $f$ adalah fungsi monoton, maka berdasarkan Teorema 2.7.10 $f$ terintegral Riemann pada Interval $[a,b]$. Berdasarkan Teorema 3.1.23 $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$.

## 3.2 Kekonvergenan Integral Mcshane di Ruang Euclid $\mathbb{R}$

Misalkan fungsi $f$ didefinisikan sebagai limit dari suatu barisan fungsi $(f_n)$ atau jumlah deret $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)_{n=1}^{\infty}$. Misalkan $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ untuk setiap $x$ pada interval $I$. Masalahnya adalah jika $f_n$ terintegral pada interval $I$ untuk setiap $n\in\mathbb{N}$ apakah $f$ terintegral pada interval $I$. Permasalahan serupa jika $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, untuk setiap $x\in I$, apakah $f$ terintegral pada interval $I$.

Teorema yang berkaitan dengan masalah ini yaitu teorema kekonvergenan, memberikan syarat cukup agar limit dari suatu barisan fungsi yang terintegralkan akan terintegralkan pula. Dengan teorema ini memudahkan untuk menguji keintegralan suatu fungsi dan mengetahui nilai integralnya tanpa melihat langsung dari definisi.

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan definisi dan sifat-sifat integral Mcshane. Sekarang akan dijelaskan bagaimana sifat kekonvergenan dari integral Mcshane.

***Teorema 3.2.1 (Teorema Kekonvergenan Monoton)***

*Misalkan* $\left(f_n\right)$ *adalah barisan monoton dari fungsi yang terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$ *dan misalkan pula* $\left(f_n\right)$ *konvergen ke* $f$ *pada* $[a,b]$. *Jika* $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$ *berhingga maka* $f$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$ *dan* $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

**Bukti:**

Karena fungsi $f_n$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah fungsi yang terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$, diperoleh untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi $\delta > 0$ pada interval $[a,b]$ dimana $D$ adalah partisi bebas berlabel pada interval $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$, berlaku $\left| f_k(D) - \int_a^b f_k \right| < \varepsilon$, setiap $k \in \mathbb{N}$.

Karena $\left(f_n\right)$ konvergen ke $f$ (berarti Kriteria Cauchy berlaku), maka terdapat $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $h,k \geq K_\varepsilon$, maka;

$$
\begin{aligned}
\left| f_k(D) - f_h(D) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i)(d_i - c_i) - \sum_{i=1}^{n} f_h(x_i)(d_i - c_i) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \left( f_k(x_i) - f_h(x_i) \right)(d_i - c_i) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left| f_k(x_i) - f_h(x_i) \right| (d_i - c_i) \\
&< \sum_{i=1}^{n} \varepsilon (d_i - c_i) = \varepsilon (b - a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)
\end{aligned}
$$

Misalkan $h \to \infty$, dari (*) diperoleh $\left| f_k(D) - f(D) \right| < \varepsilon(b-a)$.

Sekarang, kerena $h, k \geq K_\varepsilon$, maka;

$$
\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_k - \int_a^b f_h \right| &= \left| \int_a^b f_k - f_k(D) + f_k(D) - f_h(D) + f_h(D) - \int_a^b f_h \right| \\
&\leq \left| \int_a^b f_k - f_k(D) \right| + \left| f_k(D) - f_h(D) \right| + \left| f_h(D) - \int_a^b f_h \right| \\
&< \varepsilon + \varepsilon(b-a) + \varepsilon = \varepsilon(2 + b - a)
\end{aligned}
$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $\left( \int_a^b f_h \right)$ adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$, akibatnya $\left( \int_a^b f_h \right)$ konvergen (misalkan konvergen ke $A$, untuk suatu $A \in \mathbb{R}$).

Sehingga diperoleh $\lim_{h \to \infty} \left( \int_a^b f_h \right) = A$ atau dapat ditulis juga ;

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga jika $h \geq K_\varepsilon$, berlaku

$$
\left| \int_a^b f_h - A \right| < \varepsilon .
$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
\left|f(D)-A\right| &= \left|f(D)-f_k(D)+f_k(D)-\int_a^b f_k+\int_a^b f_k-A\right| \\
&\le \left|f(D)-f_k(D)\right|+\left|f_k(D)-\int_a^b f_k\right|+\left|\int_a^b f_k-A\right| \\
&< \varepsilon(b-a)+\varepsilon+\varepsilon=\varepsilon(3+b-a)
\end{aligned}$$

karena terdapat $A\in\mathbb{R}$ , dimana untuk setiap $\varepsilon>0$ dan diketahui terdapat fungsi $\delta>0$ sehingga;

$$\left|f(D)-A\right|<\varepsilon(3+b-a)$$

dimana $D$ adalah sebarang partisi bebas berlabel yang subordinat ke $\delta$ .

$A$ adalah suatu integral Mcshane pada interval $[a,b]$ ,tulis $A=\int_a^b f$ . Maka

Berdasarkan Definisi 3.1.2, diperoleh $f\in M[a,b]$ .

Diketahui pula, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n\right)=A$ dan $A=\int_a^b f$ , diperoleh bahwa $\int_a^b f=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n$

***Contoh:***

Buktikan $\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^k\left(1+\frac{x}{k}\right)^k e^{-ax}dx=\frac{1}{a-1},\ untuk\ a>1.$

**Bukti:**

Misalkan $h_k(x)=\begin{cases}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k e^{-ax}, & \text{untuk } x\in[0,k] \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ lainnya}\end{cases}$

Sekarang perhatikan fungsi $f_k(x)=\left(1+\frac{x}{k}\right)^k$. Akan dibuktikan $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=e^x$ .

Faktanya bahwa, $\left(1+\frac{x}{k}\right)^k=\exp\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)^k\right)=\exp k\ln\left(1+\frac{x}{k}\right).$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \exp k \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

$$= \exp \lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)}{\frac{1}{k}}$$

dengan menerapkan aturan L'Hospital diperoleh;

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \exp \lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)}{\frac{1}{k}} = \exp \lim_{k\to\infty} \frac{kx}{k+x} = \exp \lim_{k\to\infty} \left(k - \frac{k^2}{k+x}\right) = \exp(k)$$

Karena $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = e^x$ maka $h_k(x) = \left(1+\frac{x}{k}\right)^k e^{-ax}$ konvergen ke $e^x e^{-ax} = e^{(1-a)x}$ pada inteval $[0,\infty)$. Misalkan $f(x) = e^{(1-a)x}$, diperoleh fungsi primitif dari $f$ adalah $F(x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{1-a} e^{(1-a)x}$, maka $F'(x) = e^{(1-a)x}$. Dengan memanfaatkan Teorema Kekonvergenan Monoton dan Teorema Fundamental Kalkulus diperoleh

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^k h_x dx = \int_0^\infty e^{(1-a)x} dx = F(x)\Big|_0^\infty = \frac{1}{a-1}$$

***Teorema 3.2.2 (Teorema Kekonvergenan Terdominasi)***

*Misalkan* $(f_n)$ *adalah sebuah barisan dari fungsi terintegral Mcshane pada* $[a,b]$ *dan misalkan pula barisan* $(f_n)$ *konvergen titik demi titik ke* $f$ *pada* $[a,b]$ *dan limit dari barisan* $(f_n)$ *berhingga. Jika terdapat fungsi g yang terintegral Mcshane pada* $[a,b]$ *sedemikian sehingga* $|f_n(x)| \le g(x)$ *untuk setiap* $x \in [a,b]$ *dan setiap n, maka fungsi* $f$ *terintegral Mcshane pada* $[a,b]$ *dan*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n .$$

**Bukti:**

Dari hipotesis diperoleh $-g \leq f_k \leq g$ . Diketahui pula barisan $(f_n)$ konvergen titik demi titik ke $f$ dan limit barisan $(f_n)$ berhingga. Berdasarkan Teorema 3.2.1 , $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$.

Sekarang akan ditunjukkan $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ . Dengan Memanfaatkan Teorema 2.10.6 dan 2.10.7 maka;

$$\int_a^b \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f = \int_a^b \limsup_{n\to\infty} f \leq \limsup_{n\to\infty} \int_a^b f_n .$$

Hal ini menunjukkan $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$

**Contoh:**

Buktikan $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{x^k+1}{x^k+3}\,dx = \frac{1}{3}$.

Bukti:

Misalkan $g_k(x) = \frac{x^k+1}{x^k+3}$ maka $0 \leq g_k(x) \leq 1$ dan $g_k(x) \to \frac{1}{3}$, untuk $x \in [0,1)$ .

Dengan memanfaatkan Teorema Kekonvergenan Terdominasi terbukti bahwa $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{x^k+1}{x^k+3}\,dx = \frac{1}{3}$

***Teorema 3.2.3 (Teorema Kekonvergenan Seragam)***

*Misalkan* $(f_n)$ *adalah sebuah barisan dari fungsi terintegral Mcshane pada* $[a,b]$ *. Jika* $(f_n)$ *konvergen seragam ke* $f$ *pada* $[a,b]$*, maka* $f$ *terintegral Mcshane pada* $[a,b]$ *dan* $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$

**Bukti.**

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Diketahui bahwa $(f_n)$ konvergen seragam pada $[a,b]$ maka untuk partisi bebas berlabel $P$ pada $[a,b]$ diperoleh $\left| f_n(P) - \int_a^b f_n \right| < \varepsilon$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $(f_n)$ konvergen seragam pada $[a,b]$ maka terdapat sebuah bilangan bulat positif $N$ sedemikian sehingga $\left| f_n(P) - f_m(P) \right| < \varepsilon$ untuk setiap $m,n \geq N$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f_m \right| &= \left| \int_a^b f_n - f_n(P) + f_n(P) - f_m(P) + f_m(P) - \int_a^b f_m \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f_n - f_n(P) \right| + \left| f_n(P) - f_m(P) \right| + \left| f_m(P) - \int_a^b f_m \right| \\ &< 3\varepsilon\end{aligned}$$

untuk setiap $m,n \geq N$. Hal ini menunjukkan bahwa bahwa $\left( \int_a^b f_n \right)$ adalah sebuah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Akibatnya, $\left( \int_a^b f_n \right)$ konvergen. Katakanlah konvergen $L$.

Akan dibuktikan bahwa $\int_a^b f = L$.

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat sebuah fungsi positif $\delta$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $P$ adalah sebuah partisi bebas berlabel pada $[a,b]$ yang subordinat ke $\delta$ maka berlaku $\left| f_n(P) - \int_a^b f_n \right| < \varepsilon$. Karena $\left( \int_a^b f_n \right)$ konvergen ke L maka terdapat sebuah bilangan bulat $N$ sedemikian sehingga $\left| \int_a^b f_n - L \right| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq N$. Karena $(f_n)$ konvergen seragam ke $f$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga setiap $k \geq N$ berlaku $|f(P) - f_k(P)| < \varepsilon$.

Akibatnya:

$$|f(P) - L| = \left| f(P) - f_k(P) + f_k(P) - \int_a^b f_k + \int_a^b f_k - L \right|$$

$$\leq |f(P) - f_k(P) +| + \left| f_k(P) - \int_a^b f_k \right| + \left| \int_a^b f_k - L \right|$$

$$< 3\varepsilon$$

Jadi $f$ terintegral Mcshane pada $[a,b]$ dan $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

**Contoh:**

Buktikan $\lim_{k\to\infty} \int_1^2 x^2 e^{-kx} dx = 0$.

Bukti:

Misalkan $f_k(x) = x^2 e^{-kx}$ untuk $x \in [1,2]$. Perhatikan bahwa;

$x^2$ dan $e^{-kx}$ adalah fungsi kontinu pada interval $[1,2]$. Akibatnya, $f_k(x) = x^2 e^{-kx}$ jelas fungsi kontinu pada interval $[1,2]$. Sekarang akan ditunjukkan $\left(f_k(x)\right)$ barisan fungsi yang monoton.

Ambil sembarang $x \in [1,2]$. Perhatikan bahwa:

$$f_1(x) = \frac{x^2}{e^x},\ f_2(x) = \frac{x^2}{e^{2x}},\ f_3(x) = \frac{x^2}{e^{3x}}, \ldots,\ f_n(x) = \frac{x^2}{e^{nx}}, \ldots$$

Jelas bahwa $f_1(x) > f_2(x) > f_3(x) > \ldots > f_n(x) > \ldots$ sehingga terbukti bahwa $\left(f_k(x)\right)$ adalah barisan monoton turun. Karena $\left(f_k(x)\right)$ monoton turun dan infimum dari $f_k(x) = \dfrac{x^2}{e^{kx}}$ adalah 0 maka 0 adalah titik limit dari barisan $\left(f_k(x)\right)$.

Jadi, karena $\left(f_k(x)\right)$ adalah barisan dari fungsi kontinu yang monoton dan konvergen ke $g(x) = 0$ ($g(x) = 0$ adalah fungsi kontinu) maka $\left(f_k(x)\right)$ konvergen seragam ke 0. Dengan memanfaatkan Teorema Kekonvergenan Seragam terbukti bahwa $\lim_{k \to \infty} \int_1^2 x^2 e^{-kx}\, dx = 0$

***Lemma 3.2.4***

*Jika* $f_n, g \in M[a,b]$ *sedemikian sehingga* $g \le f_n$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$, *maka* $\inf f_n$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$.

**Bukti:**

Misalkan $g_n = \min\left\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n\right\}$, berdasarkan Teorema 3.1.16 diperoleh $g_n \in M[a,b]$. Karena $g_n = \min\left\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n\right\}$ dan $g_n$ konvergen ke $\inf f_n$.

Diketahui pula, karena $g \le f_n$ maka $g \le g_n$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Teorema 3.1.4 diperoleh; $\int_a^b g \le \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n \le \int_a^b g_1$

Akibatnya, diperoleh bahwa $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n$ berhingga . dilain pihak diketahui pula $g_n$ konvergen ke inf $f_n$. Berdasarkan Teorema 3.2.1 , inf $f_n$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$ dan $\int_a^b \inf f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n$ .

***Proposisi 3.2.5 (Lemma Fatao)***

*Misalkan* $f_n, g \in M[a,b]$ *sedemikian sehingga* $g \le f_n$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ . *Jika* $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ *dan* $\liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ *berhingga, maka* $f$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$ *dan* $\int_a^b f \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ .

**Bukti:**

Jika $g_n = \inf_{k \ge n} f_k$ , untuk $k \in \mathbb{N}$ . Berdasarkan Lemma 3.2.4 didapat $g_n$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$. Karena $g \le f_n$ dan $g_n = \inf_{k\ge n} f_k$ (berarti $g_n \le f_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ ) , diperoleh $\int_a^b g \le \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ . Karena $g_n = \inf_{k\ge n} f_k$ dan $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ ,hal ini menunjukkan $g_n$ konvergen ke $f$ . Berdasarkan Teorema 3.2.1 diperoleh $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$ dan $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ .

**Teorema 3.2.6**

*Misalkan* $f_n, g \in M[a,b]$ *sedemikian sehingga* $|f_n| \le g$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ . *Jika* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ *maka* $f$ *terintegral Mcshane pada interval* $[a,b]$ *dan* $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ .

**Bukti:**

Berdasarkan Teorema 3.2.2 diperoleh bahwa $f$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$ dan diperoleh $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$

**Teorema 3.2.7**

*Misalkan* $(f_n)$ *adalah barisan dari fungsi yang terintegral Mcshane pada* $[a,b]$ *sedemikian sehingga* $(f_n)$ *konvergen ke* $f$ *pada* $[a,b]$ . *Jika* $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ *berhingga dimana* $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |f_n|$ *konvergen, maka* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in M[a,b]$ *dan* $\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$ .

**Bukti:**

Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ , misalkan $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ dan $g_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n|$ . Berdasarkan Teorema 3.1.9 dan Teorema 3.1.4 , maka untuk setiap $g_k$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$ , dimana $\lim_{k\to\infty} \int_a^b g_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_a^b |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |f_n| < \infty$ .

Berdasarkan Teorema 3.2.1 diperoleh bahwa $g$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$, dimana $\left|\sum_{n=1}^{k} f_n\right| \le g_k \le g$ dan $\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Berdasarkan Teorema kekonvergenan Dominan, diperoleh $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ terintegral Mcshane pada interval $[a,b]$ dan $\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \lim_{k\to\infty}\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{k} f_n\right) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_a^b f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n$.