BAB III

MODEL TRINOMIAL

3.1 Model Trinomial

Model binomial merupakan pemodelan dinamika pergerakan harga saham yang hanya mempunyai dua kemungkinan pergerakan harga saham, yaitu harga saham naik atau harga saham turun. Pada kenyataannya, harga saham di pasar bebas akan mengalami banyak kemungkinan pergerakan harga saham setiap waktu. Model trinomial merupakan perluasan dari model binomial. Model trinomial merupakan pemodelan dinamika pergerakan harga saham yang mempunyai tiga kemungkinan pergerakan harga saham, yaitu harga saham naik, harga saham turun atau harga saham bernilai tetap. Oleh karena itu, diharapkan model trinomial lebih fleksibel dalam memperkirakan pergerakan harga saham.

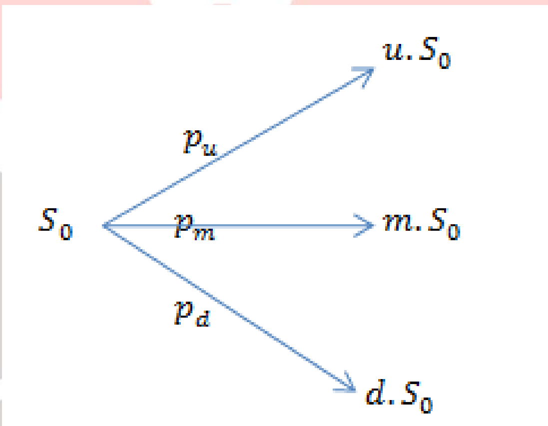
3.1.1 Model Trinomial Boyle

Model trinomial Boyle merupakan model trinomial pertama yang di bangun diperkenalkan oleh Phelim Boyle pada tahun 1986. Model trinomial Boyle merupakan perkembangan dari model binomial CRR. Pada model trinomial ini, Boyle mengasumsikan peluang kemungkinan pergerakan harga saham tetap sebesar 2/3 dan peluang kemungkinan harga saham naik ditambah peluang kemungkinan harga saham turun sebesar 1/3, asumsi ini diperoleh berdasarkan pengamatan atau informasi harga saham terdahulu.

3.1.2 Model Trinomial Hull

Pada tahun 1988, Hull mengembangkan model trinomial lain. Menurut pengamatan yang dilakukan oleh Hull diperoleh suatu kesimpulan bahwa peluang kemungkinan pergerakan harga saham tetap sebesar ½ dan peluang kemungkinan harga saham naik ditambah peluang kemungkinan harga saham turun seberas ½.

Dalam membangun model trinomial prosesnya hampir sama dengan model binomial. Pada model trinomial, setiap selang waktu Δt harga saham (S_n) dapat mengalami kenaikan sebesar u, penurunan sebesar d atau tetap sebesar m $(m = 1)$ dengan masing-masing probabilitas dari u, d, m yaitu sebesar p_u, p_d, p_m.

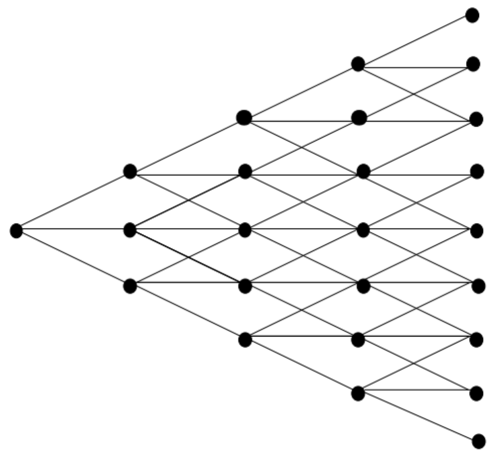


Gambar 3.1

Model Trinomial satu langkah

dengan asumsi $p_u + p_d + p_m = 1$ dan $u.d = 1$.

Model trinomial merupakan model diskritisasi yaitu mengubah selang waktu $[0, T]$ yang kontinu menjadi partisi waktu T diskrit dengan selang waktu yang sama. Hal ini berarti membagi batas waktu interval $[0, T]$ menjadi M partisi dengan selang waktu Δt yang sama dari masing-masing partisi dimana banyaknya kemungkinan harga saham pada setiap partisi sebanyak $2M + 1$.



Gambar 3.2

Pohon trinomial pada saat *expiry date*

Apabila partisi semakin banyak maka $\Delta t \to 0$ sehingga hasil pendekatan yang didapatkan akan semakin baik. Untuk memudahkan dalam memahami pembahasan selanjutnya maka didefinisikan beberapa notasi sebagai berikut :

M : $banyaknya\ partisi$

$$\Delta t = \frac{M}{t}; menyatakan\ interval\ waktu$$

$t_i = i\Delta t\ menyatakan\ waktu\ ke - i;\ i = 1,2,\dots,M$

$S_i = S(t_i)\ menyatakan\ harga\ saham\ \ pada\ interval\ waktu\ ke - i$

3.2 Penentuan Parameter Model Trinomial

Pada model trinomial terdapat lima parameter yang berpengaruh yaitu, u, d, p_u, p_d, p_m. Untuk menentukan parameter-parameter tersebut dibutuhkan tiga asumsi, yaitu :

(A1) Ekspektasi model harga saham diskrit sama dengan ekspektasi harga saham model kontinu

(A2) Variansi model harga saham diskrit sama dengan variansi model harga saham kontinu

(A3) $p_u + p_d + p_m = 1$ dan $u.d = 1$

Diketahui ekspektasi model harga saham diskrit adalah sebagai berikut :

$$E(x) = \sum xf(x_i)$$

$$E(S_{i+j}) = p_u uS_i + p_m S_i + p_d dS_i \tag{3.1}$$

Berdasarkan asumsi (A1) maka dengan menggunakan persamaan (2.15) dan persamaan (3.1) diperoleh

$$p_u u + p_m + p_d d = e^{r\Delta t} \tag{3.2}$$

Diketahui variansi harga saham diskrit adalah sebagai berikut :

$$Var(S_{i+1}) = p_u(uS_i)^2 + p_m {S_i}^2 + p_d(dS_i)^2 - (p_u u + p_m + p_d d)S_i)^2 \tag{3.3}$$

Substitusikan persamaan (3.2) ke dalam persamaan (3.3). Sehingga diperoleh

$$Var(S_{i+1}) = p_u(uS_i)^2 + p_m {S_i}^2 + p_d(dS_i)^2 - e^{2r\Delta t} {S_i}^2 \tag{3.4}$$

Berdasarkan asumsi (A2), dengan menggunakan persamaan (2.17) dan (3.4) maka diperoleh

$${S_i}^2 e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - e^{2r\Delta t} {S_i}^2 = p_u(uS_i)^2 + p_m {S_i}^2 + p_d(dS_i)^2 - e^{2r\Delta t} {S_i}^2$$

$${S_i}^2 e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} = p_u(uS_i)^2 + p_m {S_i}^2 + p_d(dS_i)^2$$

$$e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} = p_u u^2 + p_m + p_d d^2 \tag{3.5}$$

Setelah semua asumsi terpenuhi, maka parameter u, d, p_u, p_d, p_m pada model trinomial Hull dan Boyle dapat ditentukan.

3.2.1 Model Trinomial Hull

Pada model trinomial ini Hull mengasumsikan bahwa :

$$p_m = \frac{2}{3} \tag{3.6}$$

$$p_u + p_d = \frac{1}{3} \tag{3.7}$$

$$u.d = 1 \tag{3.8}$$

dengan menggunakan persamaan (3.6) dan persamaan (3.7) maka persamaan (3.2) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$p_u u + p_m + p_d d = e^{r\Delta t}$$

$$p_u u + \frac{2}{3} + (\frac{1}{3} - p_u)d = e^{r\Delta t}$$

$$p_u = \frac{e^{r\Delta t} - \frac{1}{3}d - \frac{2}{3}}{(u-d)}; \tag{3.9}$$

Kemudian berdasarkan persamaan (3.6) dan persamaan (3.7) maka persamaan (3.5) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} = p_u u^2 + p_m + p_d d^2$$

$$e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} = p_u u^2 + \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - p_u\right) d^2$$

$$p_u = \frac{e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - \frac{1}{3}d^2 - \frac{2}{3}}{(u-d)^2} \tag{3.10}$$

dengan batasan $0 < d < u$. Karena $p_{u,} p_d, p_m$ merupakan suatu probabilitas dari faktor kenaikan, faktor penurunan, dan faktor tetap maka nilai $p_{u,} p_d, p_m$ akan berada di antara interval [0,1]. Selanjutnya dengan menyamakan persamaan (3.9) dan persamaan (3.10) sehingga diperoleh

$$\frac{e^{r\Delta t} - \frac{1}{3}d - \frac{2}{3}}{(u-d)} = \frac{e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - \frac{1}{3}d^2 - \frac{2}{3}}{(u-d)^2}$$

$$\left(e^{r\Delta t}-\frac{1}{3}d-\frac{2}{3}\right)(u+d)=e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}-\frac{1}{3}d^{2}-\frac{2}{3}$$

$$e^{r\Delta t}(u+d)-\tfrac{1}{3}d(u+d)-\tfrac{2}{3}(u+d)=e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}-\tfrac{1}{3}d^{2}-\tfrac{2}{3} \qquad (3.11)$$

dengan menggunakan persamaan (3.8), diperoleh

$$\left(e^{r\Delta t}-\frac{2}{3}\right)(u+d)=e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}-\frac{1}{3}$$

$$\left(e^{r\Delta t}-\frac{2}{3}\right)\left(u+\frac{1}{u}\right)=e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}-\frac{1}{3}$$

$$\left(e^{r\Delta t}-\frac{2}{3}\right)(u^2+1)=\left(e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}-\frac{1}{3}\right)u$$

$$\left(e^{r\Delta t}-\tfrac{2}{3}\right)u^2-\left(e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}-\tfrac{1}{3}\right)u+\left(e^{r\Delta t}-\tfrac{2}{3}\right)=0 \qquad (3.12)$$

membagi persamaan (3.12) dengan $\left(e^{r\Delta t}-\tfrac{2}{3}\right)$, sehingga diperoleh

$$u^2-\frac{\left(e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}-\frac{1}{3}\right)}{\left(e^{r\Delta t}-\frac{2}{3}\right)}u+1=0 \qquad (3.13)$$

Misalkan $2\beta=\frac{\left(e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}-\frac{1}{3}\right)}{\left(e^{r\Delta t}-\frac{2}{3}\right)}$, maka persamaan (3.13) menjadi persamaan kuadrat dalam bentuk $u^2-2\beta u+1=0$. Sehingga diperoleh akar-akar persamaannya yaitu $u=\beta\pm\sqrt{\beta^2-1}$. Karena diketahui $u>0$ maka diperoleh

$$u=\beta+\sqrt{\beta^2-1}$$

dengan melakukan pendekatan suku pertama deret taylor $e^x\approx 1+x$ maka di dapat nilai β yaitu

$$\beta=\frac{1}{2}\frac{\left(e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}-\frac{1}{3}\right)}{\left(e^{r\Delta t}-\frac{2}{3}\right)}$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(\frac{1+(2r+\sigma^2)\Delta t-\frac{1}{3}}{1+r\Delta t-\frac{2}{3}}\right)$$

$$=\left(\frac{\frac{2}{3}+(2r+\sigma^2)\Delta t}{\frac{2}{3}+2r\Delta t}\right)$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\left(1+\frac{3}{2}\left((2r+\sigma^2)\Delta t\right)\right)}{\frac{2}{3}(1+3r\Delta t)}$$

$$\approx \frac{e^{\frac{3}{2}\left((2r+\sigma^2)\Delta t\right)}}{e^{3r\Delta t}}$$

$$=e^{\frac{3}{2}\left((2r+\sigma^2)\Delta t\right)-3r\Delta t}$$

$$=e^{\frac{3}{2}\sigma^2\Delta t}$$

kemudian substitusikan $\beta = e^{\frac{3}{2}\sigma^2\Delta t}$ ke dalam persamaan $u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$.

$$u = e^{\frac{3}{2}\sigma^2\Delta t} + \sqrt{(e^{\frac{3}{2}\sigma^2\Delta t})^2 - 1}$$

$$= e^{\frac{3}{2}\sigma^2\Delta t} + \sqrt{e^{3\sigma^2\Delta t} - 1}$$

$$\approx \left(1+\frac{3}{2}\sigma^2\Delta t\right) + \sqrt{1+3\sigma^2\Delta t - 1}$$

$$u = 1 + \sqrt{3\sigma^2\Delta t} + \frac{3}{2}\sigma^2\Delta t \qquad (3.14)$$

dengan melakukan pendekatan dua suku pertama deret taylor yaitu $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pada persamaan (3.14) sehingga diperoleh

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}$$

Berdasarkan persamaan (3.8) maka diperoleh

$$d = e^{-\sigma\sqrt{3\Delta t}}$$

Dengan melakukan pendekatan suku pertama deret taylor pada persamaan (3.9) sehingga diperoleh nilai p_u adalah sebagai berikut :

$$p_u = \frac{e^{r\Delta t} - \frac{1}{3}e^{-\sigma\sqrt{3\Delta t}} - \frac{2}{3}}{\left(e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{3\Delta t}}\right)}$$

$$\approx \frac{(1 + r\Delta t) - \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{3\sigma^2\Delta t} + \frac{3}{2}\sigma^2\Delta t\right) - \frac{2}{3}}{\left(1 + \sqrt{3\sigma^2\Delta t} + \frac{3}{2}\sigma^2\Delta t\right) - \left(1 - \sqrt{3\sigma^2\Delta t} + \frac{3}{2}\sigma^2\Delta t\right)}$$

$$= \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \frac{1}{3}\sigma\sqrt{3\Delta t}}{2\sigma\sqrt{3\Delta t}}$$

$$= \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\Delta t^2}}{\sqrt{12\sigma^2\Delta t}} + \frac{1}{6}$$

$$= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\frac{\Delta t^2}{12\sigma^2\Delta t}} + \frac{1}{6}$$

$$= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} + \frac{1}{6}$$

dengan asumsi $p_u + p_d = \frac{1}{3}$ sehingga diperoleh nilai p_d yaitu

$$p_d = \frac{1}{3} - p_u$$

$$p_d = \frac{1}{3} - \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} + \frac{1}{6}\right)$$

$$p_d = \frac{1}{6} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan untuk model trinomial menurut Hull dengan asumsi (3.7), (3.8), dan (3.9) maka diperoleh parameter u, d, p_u, p_d, p_m sebagai berikut

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{3\Delta t}} \quad p_u = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} + \frac{1}{6} \quad p_m = \frac{2}{3}$$

$$p_d = \frac{1}{6} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} \tag{3.15}$$

3.2.2 Model Trinomial Boyle

Pada bagian ini, penulis akan menggunakan model trinomial Boyle dengan mengasumsikan

$$p_m = \frac{1}{2} \tag{3.16}$$

$$p_u + p_d = \frac{1}{2} \tag{3.17}$$

Proses penentuan parameter model trinomial Boyle sama dengan proses penentuan parameter pada model trinomial Hull.

Dengan menggunakan persamaan (3.16) dan (3.17) maka persamaan (3.2) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$p_u u + p_m + p_d d = e^{r\Delta t}$$

$$p_u u + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - p_u)d = e^{r\Delta t}$$

$$p_u = \frac{e^{r\Delta t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}d}{(u-d)} \tag{3.18}$$

Kemudian berdasarkan persamaan (3.16) dan persamaan (3.17) maka persamaan (3.5) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$p_u u^2 + p_m + p_d d^2 = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}$$

$$p_u u^2 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - p_u)d^2 = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}$$

$$p_u = \frac{e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - \frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2}}{(u-d)^2} \qquad (3.19)$$

Selanjutnya dengan menyamakan persamaan (3.18) dan persamaan (3.19) sehingga diperoleh

$$\frac{e^{r\Delta t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}d}{(u-d)} = \frac{e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - \frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2}}{(u-d)^2}$$

$$\left(e^{r\Delta t} - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}\right)(u+d) = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - \frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2}$$

$$e^{r\Delta t}(u+d) - \frac{1}{2}d(u+d) - \frac{1}{2}(u+d) = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - \frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2} \qquad (3.20)$$

Karena $u.d = 1$ maka diperoleh

$$\left(e^{r\Delta t} - \frac{1}{2}\right)(u+d) = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}$$

$$\left(e^{r\Delta t} - \frac{1}{2}\right)\left(u + \frac{1}{u}\right) = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}$$

$$\left(e^{r\Delta t} - \frac{1}{2}\right)(u^2+1) = \left(e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}\right)u$$

$$\left(e^{r\Delta t} - \frac{1}{2}\right)u^2 - \left(e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}\right)u + \left(e^{r\Delta t} - \frac{1}{2}\right) = 0 \qquad (3.21)$$

Membagi persamaan (3.21) dengan $\left(e^{r\Delta t} - \frac{1}{2}\right)$ sehingga didapatkan

$$u^2 - \frac{\left(e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}\right)}{\left(e^{r\Delta t} - \frac{1}{2}\right)}u + 1 = 0 \qquad (3.22)$$

misalkan $2\beta = \frac{\left(e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}\right)}{\left(e^{r\Delta t} - \frac{1}{2}\right)}$, maka persamaan (3.22) dapat menjadi persamaan kuadrat dalam bentuk $u^2 - 2\beta u + 1 = 0$. Sehingga diperoleh akar-akar persamaannya yaitu $u = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$. Karena diketahui $0 < d < u$ sehingga diperoleh u yaitu

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$$

Dilakukan pendekatan suku pertama deret taylor $e^x \approx 1 + x$ maka di dapat nilai β yaitu

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{\left(e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}\right)}{\left(e^{r\Delta t} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(\frac{1 + (2r + \sigma^2)\Delta t}{1 + r\Delta t - \frac{1}{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1 + (2r + \sigma^2)\Delta t}{1 + 2r\Delta t}\right)$$

$$\approx \frac{e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}}{e^{2r\Delta t}}$$

$$= e^{(2r+\sigma^2)\Delta t - 2r\Delta t}$$

$$= e^{\sigma^2\Delta t}$$

kemudian substitusikan $\beta = e^{\sigma^2\Delta t}$ ke dalam persamaan $u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$ sehingga diperoleh nilai u.

$$u = e^{\sigma^2\Delta t} + \sqrt{(e^{\sigma^2\Delta t})^2 - 1}$$

$$= e^{\sigma^2\Delta t} + \sqrt{e^{2\sigma^2\Delta t} - 1}$$

$$\approx (1 + \sigma^2\Delta t) + \sqrt{1 + 2\sigma^2\Delta t - 1}$$

$$= 1 + \sqrt{\sigma^2\Delta t} + 2\sigma^2\Delta t \qquad (3.23)$$

Dengan melakukan pendekatan dua suku pertama deret taylor yaitu $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pada persamaan (3.23) sehingga didapatkan

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

karena $u.d = 1$ sehingga diperoleh

$$d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

Dengan melakukan pendekatan suku pertama deret taylor pada persamaan (3.18) sehingga diperoleh nilai p_u adalah sebagai berikut :

$$p_u = \frac{e^{r\Delta t} - \frac{1}{3}e^{-\sigma\sqrt{3\Delta t}} - \frac{2}{3}}{\left(e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{3\Delta t}}\right)}$$

$$\approx \frac{(1 + r\Delta t) - \frac{1}{2}\left(1 - \sigma\sqrt{2\Delta t} + \sigma^2\Delta t\right)}{\left(1 + \sigma\sqrt{2\Delta t} + \sigma^2\Delta t\right) - \left(1 - \sqrt{2\Delta t} + \sigma^2\Delta t\right)}$$

$$= \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{2\Delta t}}{2\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

$$= \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\Delta t^2}}{\sqrt{8\sigma^2\Delta t}} + \frac{1}{4}$$

$$= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\frac{\Delta t^2}{8\sigma^2\Delta t}} + \frac{1}{4}$$

$$= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\frac{\Delta t}{8\sigma^2}} + \frac{1}{4}$$

Selanjutnya untuk memperoleh nilai p_d dengan asumsi $p_u + p_d = \frac{1}{2}$ diperoleh

$$p_u + p_d = \frac{1}{2}$$

$$p_d = \frac{1}{2} - p_u$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\frac{\Delta t}{8\sigma^2}} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\frac{\Delta t}{8\sigma^2}}$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan untuk model trinomial menurut Boyle dengan asumsi persamaan (3.16) dan persamaan (3.17) maka diperoleh parameter u, d, p_u, p_d, p_m adalah

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} \qquad p_u = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\frac{\Delta t}{8\sigma^2}} + \frac{1}{4} \qquad p_m = \frac{1}{2}$$

$$p_d = \frac{1}{4} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\frac{\Delta t}{8\sigma^2}} \tag{3.24}$$

3.3 Penentuan Harga Opsi Eropa Menggunakan Model Trinomial

Terdapat beberapa komponen yang penting dalam penentuan harga opsi, yaitu harga saham awal (S_0), *strike price* (K), *expiryd date* (T), *selang waktu* (Δt), volatility (σ), dan tingkat suku bunga (r). Komponen tersebut harus dapat ditentukan di awal perjanjian sehingga diperoleh harga opsi pada waktu $t = 0$. Dalam penentuan harga opsi untuk tipe Eropa dan tipe Amerika berbeda, opsi Amerika melibatkan nilai instrik namun untuk opsi Eropa tidak melibatkan nilai instrik.

Algoritma yang perlu diperhatikan dalam penentuan harga opsi Eropa adalah :

1. $Input\ (K, T, r, M, \sigma, S_0)$
2. Menentukan parameter u, d, p_u, p_m, p_d
3. Menghitung harga saham pada saat waktu $t = 0$ sampai $t = T$ (*expiry date*).
4. Menghitung nilai *payoff* .
5. Menentukan harga opsi dengan menggunakan algoritma *backward*.
6. Algoritma *backward* bekerja mundur dengan menganggap $f_{i,M} = C_{i,M}$, $f_{i,M} = P_{i,M}$ hingga diperoleh hasil akhir yaitu $f_{1,0}$.

3.3.1 Penentuan Harga Saham

Langkah pertama dalam penentuan harga opsi adalah penentuan harga saham. Harga saham dapat ditentukan dengan membangun pohon trinomial. Semua titik simpul mengandung nilai harga saham yang diperoleh menggunakan persamaan di bawah ini.

$$S_{ji} = S_0 u^i d^{j-1}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, M,\ j = 1,2, \dots, 2i + 1 \tag{3.25}$$

j : indeks kemungkinan harga saham

i : interval waktu

S_{ji} menyatakan kemungkinan harga saham ke-j pada interval waktu ke-i.

$S_{10} = S_0 u^0 d^0 = S_0$

$S_{11} = S_0 u^1 d^0 = S_0 u$

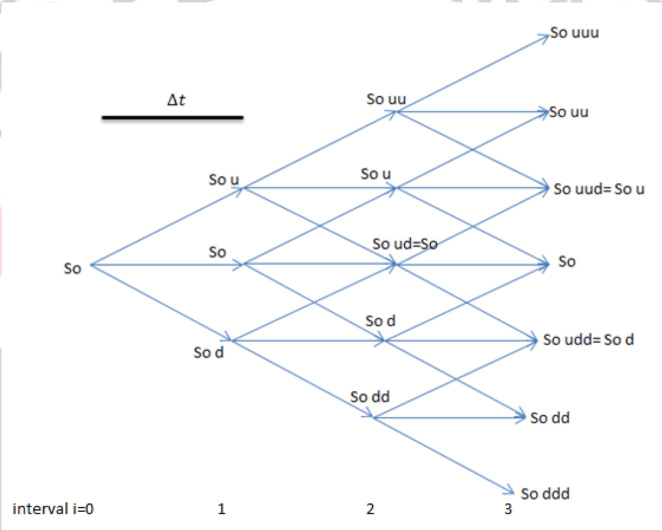
$S_{21} = S_0 u^1 d^1 = S_0 ud = S_0$

$S_{32} = S_0 u^1 d^2 = S_0 udd = S_0 d$

$\vdots$

$S_{2M+1,M} = S_0 u^M d^{2M} = S_0 d^M.$

Pohon trinomial dalam penentuan harga opsi dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambat 3.3

Pohon trinomial harga saham

3.3.2 Penentuan Nilai *Payoff*

Payoff merupakan keuntungan yang diperoleh dari transaksi. Di setiap titik simpul memiliki nilai *payoff*. Dalam opsi Eropa, *payoff* yang digunakan hanya nilai *payoff* pada periode akhir saja karena *holder* dapat meng-*exercise* (merealisasikan haknya) opsinya pada saat *expiry date*. Pada opsi *call* Eropa, di akhir periode *holder* mengharapkan $S(T) > K$ karena akan memberikan keuntungan bagi *holder* sebesar $S(T) - K$. Sedangkan jika $S(T) < K$ *holder* cenderung mengambil keputusan untuk tidak meng-*exercise* opsinya, karena opsi tersebut tidak akan memberikan keuntungan bagi *holder*. Sehingga jika $S(T) < K$ nilai *payoff*-nya sama dengan nol.

Sebaliknya untuk opsi *put*, pada saat *expiry date holder* mengharapkan $S(T) < K$ karena akan memberikan keuntungan bagi *holder* sebesar $K - S(T)$. Jika $S(T) > K$ maka *holder* akan mengambil keputusan untuk tidak meng-*exercise* opsinya karena tidak akan memberikan keuntungan bagi *holder* artinya nilai *payoff* yang diperoleh *holder* sama dengan nol. Sehingga diperoleh nilai *payoff* untuk semua kemungkinan harga saham adalah sebagai berikut :

- **Opsi *call***

$$C_{ji}(S_{ji}, T) = \max(S_{ji} - K, 0) \tag{3.26}$$

- **Opsi *put***

$$P_{ji}(S_{ji}, T) = \max(K - S_{ji},\ 0) \tag{3.27}$$

dengan $i = 0,1,\dots,M$ dan $j = 1,2,\dots,2i+1$.

P : $payoff$ opsi put

C : $payoff$ opsi $call$

S : harga saham

T : $waktu\ periode$

K : $strike\ price$

3.3.3 Algoritma Induksi *Backward*

Langkah terakhir yang perlu dilakukan adalah menentukan harga opsi pada saat $t = 0$ dengan menggunakan algoritma induksi *backward*. Proses penentuan harga opsi *call* Eropa sama dengan proses penentuan harga opsi *put* Eropa. Penentuan harga opsi bekerja secara mundur (*backward*) dari periode ke-(M-1) hingga periode ke-0, sedangkan nilai opsi untuk periode ke-M sama dengan nilai *payoff*-nya .

Sehingga rumus penentuan nilai opsi dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$f_{j,i} = e^{-r\Delta t}[p_u f_{j+1,i+1} + p_m f_{j+1,i}, p_d f_{j+1,i-1}] \tag{3.28}$$

dengan n menyatakan batas interval dan i menyatakan tingkat harga saham. Rumus pada persamaan (3.20) menyatakan bahwa harga opsi diiperoleh dengan menjumlahkan tiga kemungkinan nilai opsi (naik, tetap dan turun) pada periode berikutnya dan mengalikannya dengan $e^{-r\Delta t}$, hingga diperoleh nilai opsi pada saat $t = 0$.