BAB 3

KONDISI RANK SEHINGGA MATRIKS AB DAN BA SERUPA

Pada bab ini akan diperkenalkan konsep matriks penrose dan grup inverse serta akan ditunjukkan syarat cukup, syarat perlu atau keduanya pada *rank* matriks A dan B sehingga perkalian matriks *AB* dan *BA* serupa dan sifat-sifat matriks A dan B yang serupa.

3.1 Matriks Penrose

Pada tahun 1955, *Penrose* menunjukkan bahwa untuk setiap matriks hingga A (persegi atau persegi panjang) dari elemen real atau kompleks, terdapat matriks tunggal X sehingga memenuhi persamaan sebagai berikut :

$AXA = A$ (1)

$XAX = X$ (2)

$(AX)^* = AX$ (3)

$(XA)^* = XA$ (4)

Untuk setiap $A \in M_n(\mathbf{C})$, notasi $A\{1,2,3,4\}$ adalah himpunan dari semua matriks X di $M_n(\mathbf{C})$ yang memenuhi persamaan (1), (2), (3) dan (4). Dari persamaan (1), (2), (3), dan (4) diatas, sebuah matriks $X \in A\{1,2,3,4\}$ disebut *inverse*-$\{1,2,3,4\}$ dari A dan dinotasikan sebagai $A^{\{1,2,3,4\}}$. Akibatnya :

$A^{(1)}$ adalah himpunan matriks $X \in M_n(\boldsymbol{C})$ yang memenuhi persamaan (1) dan

$A^{(1,2)}$ adalah himpunan matriks $X \in M_n(\boldsymbol{C})$ yang memenuhi persamaan (1) dan (2).

Definisi 3.1.1

$A^{(1,\ 2,\ 3,\ 4)}$ adalah himpunan matriks $X \in M_n(\boldsymbol{C})$yang memenuhi persamaan persamaan (1), (2), (3) dan (4) yang disebut juga *inverse Moore-Penrose*.

Empat persamaan *Penrose* diatas dilengkapi dengan persamaan berikut (yang hanya berlaku untuk matriks persegi) :

$A^kXA = A^k$ (5)

$AX = XA$ (6)

$A^kXA = XA^k$ (7)

$AX^k = X^kA$ (8)

dengan k : bilangan bulat positif.

Setiap matriks persegi yang memiliki *inverse*-{5, 2, 6} tunggal dimana k adalah *indeks* disebut *inverse Drazin*. Untuk sebarang matriks persegi A, *inverse Darzin* dinotasikan dengan A^D.

Dari persamaan (5), (2), (6) diperoleh :

$AX = XA$

$$A^{k+1}X = A^k \qquad (9)$$

$$AX^2 = X \qquad (10)$$

dalam hal ini $X = A^D$.

Teorema 3.1.2

Diketahui A sebagai matriks *Hermit*. Misalkan $A \in M_n(\mathbf{C})$ maka AA^* serupa A^*A dan $AA^{(1)}$ serupa $A^{(1)}A$.

Bukti :

Akan dibuktikan AA^* serupa A^*A. Karena $A^* = A$ maka $AA^* = AA = A^*A$ akibatnya terdapat $I \in GL_n(\mathbf{C})$ sehingga

$$AA^* = I\,AA^*A = I^{-1}\,AA^*I = I^{-1}\,A^*AI$$

$$AA^* = I^{-1}\,A^*AI$$

Jadi AA^* serupa A^*A, dengan A merupakan matriks *Hermit*. Akan dibuktikan bahwa $AA^{(1)}$ serupa $A^{(1)}A$. Diketahui $A^* = A$ dan $AA^{(1)}A = A$. Diketahui pula jika $AB = A = BA$ maka $B = I$ dengan $A,B \in M_n(\mathbf{C})$.

$$AA^{(1)}A = (AA^{(1)}A)A^{(1)} = AA^{(1)}\,AA^{(1)}A = A$$

maka

$$AA^{(1)} = AA^{(1)}\,AA^{(1)}\,AA^{(1)}$$

atau dapat ditulis dengan bentuk

$$AA^{(1)}AA^{(1)}AA^{(1)} = AA^{(1)} = AA^{(1)}(AA^{(1)}A)$$

akibatnya

$$AA^{(1)}AA^{(1)} = I$$

$$AA^{(1)} = (AA^{(1)}A)A^{(1)} = AA^{(1)}AA^{(1)} = I$$

$$AA^{(1)} = I$$

maka

$$AA^{(1)} = A^{(1)}(AA^{(1)}AA^{(1)}A)$$

atau dapat ditulis dengan bentuk

$$(A^{(1)}AA^{(1)}A)A^{(1)}A = A^{(1)}A = (A^{(1)}A(A^{(1)}AA^{(1)}A))$$

Akibatnya

$$A^{(1)}AA^{(1)}A = I$$

$$A^{(1)}A = A^{(1)}(AA^{(1)}A) = A^{(1)}A\,A^{(1)}A = I$$

$$A^{(1)}A = I$$

$$A^{(1)}A = I = AA^{(1)}$$

Jelas $A^{(1)}A$ serupa $AA^{(1)}$ karena terdapat $I \in GL_n(\mathbf{C})$ sehingga $A^{(1)}A = I^{-1}AA^{(1)}$I.

Teorema 3.1.3

Misalkan $A,B \in M_n(\mathbf{C})$ adalah dua matriks berukuran $n \times n$, akan dibuktikan bahwa AA^+BB^+ serupa BB^+AA^+

Bukti :

Dari **teorema 3.1.2** diketahui $A^{(1)}A$ serupa $AA^{(1)}$ maka $AA^{(1)}\ AA^{(1)} = I$. *Inverse Moore-Penrose* memenuhi persamaan sebagai berikut :

1. $AA^+A = A$
2. $A^+\ AA^+ = A^+$
3. $(AA^+) = A^+$
4. $(A^+A) = A^+A$

Karena memenuhi $AA^+A = A$ dan $A^* = A$ maka $AA^+\ AA^+ = I$, akibatnya

$$AA^+\ BB^+ = AA^+\ BB^+I = AA^+\ BB^+\ AA^+\ AA^+$$

$$= AA^+(\ BB^+\ AA^+)\ AA^+$$

Jadi $AA^+\ BB^+$ serupa $BB^+\ AA^+$.

3.2 Grup *inverse*

Definisi 3.2.1

Misalkan $A \in M_n(\mathbf{C})$, grup *inverse* A adalah *inverse Drazin* atas A dengan $ind A = 1$. Dinotasikan dengan $A^\#$.

Teorema 3.2.2

Misalkan $A \in M_n(\mathbf{C})$, maka $A^\#$ ada jika $rankA = rankA^2$.

Bukti :

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

karena $A \in M_n(\mathbf{C})$ maka $A^2 \in M_n(\mathbf{C})$. Dari **teorema 2.3.1.3**, maka A dan A^2 memiliki dimensi ruang baris dan ruang kolom yang sama. Ini berarti

$rankA = rankA^2$. Jadi dapat disimpulkan $A^\#$ ada.

3.3 Syarat perlu dan cukup rank matriks sehingga AB dan BA serupa

Definisi 3.3.1

Suatu matriks persegi A dikatakan serupa dengan matriks B jika terdapat suatu matriks P yang mempunyai *inverse* sehingga $A = PBP^{-1}$.

Pada persamaan $A = PBP^{-1}$ dapat dituliskan kembali sebagai

$$B = P^{-1}AP \qquad \text{atau} \qquad B = P^{-1}A(P^{-1})^{-1}$$

dengan memisalkan $Q = P^{-1}$ maka akan didapatkan

$$B = QAQ^{-1}$$

Yang mengatakan bahwa B serupa dengan A. Maka, B serupa dengan A jika dan hanya jika A serupa dengan B. Untuk selanjutnya akan disebut A dan B serupa.

Definisi 3.3.2

Sebuah matriks persegi A dikatakan matriks *orthogonal* jika $A^{-1} = A^t$ sehingga berlaku $AA^t = A^tA = I$ dengan A^t matriks *transpose*.

Dari **definisi 3.3.2** diperoleh :

Teorema 3.3.3

Jika A, B adalah dua matriks *orthogonal* berukuran n´ n maka AB serupa BA.

Bukti :

Ambil $A,B \in M_n(\mathbf{C})$ dan keduanya matriks *orthogonal*, akibatnya

$AA^t = I$ dan $BB^t = I$

dengan menggunakan **definisi 3.3.2** diperoleh:

$AB = ABI = ABAA^t$ karena $AA^t = I$, maka

$AB = ABAA^{-1}$

Jadi AB serupa BA.

Terorema 3.3.4

Jika $A \in GL_n(\mathbf{C})$ dan $B \in GL_n(\mathbf{C})$ maka AB dan BA serupa.

Bukti :

Ambil $A \in GL_n(\mathbf{C})$, terdapat $A^{-1} \in GL_n(\mathbf{C})$ yang memenuhi

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A \text{ dan } B \in GL_n(\mathbf{C})$$

Perhatikan :

$$BA = IBA = A^{-1}ABA$$

Jadi BA serupa dengan AB. Dan dengan cara yang sama, yaitu :

Ambil $B \in GL_n(\mathbf{C})$, terdapat $B^{-1} \in GL_n(\mathbf{C})$ yang memenuhi

$$BB^{-1} = I = B^{-1}B \text{ dan } A \in GL_n(\mathbf{C})$$

Perhatikan :

$$AB = IAB = B^{-1}BAB$$

Jadi AB serupa dengan BA.

Berikut akan diselidiki apakah dua buah matriks yang serupa akan memiliki *poinomial karakteristik* yang sama :

Teorema 3.3.5

Jika AB dan BA serupa maka AB dan BA mempunyai *polinomial karakteristik* yang sama.

Bukti :

Ambil $A,B \in M_n(\mathbf{C})$. AB dan BA serupa maka terdapat $P \in GL_n(\mathbf{C})$ sehingga :

$$AB = PBAP^{-1}$$

Misalkan :

C_{AB}(t) = *polinomial karakteristik AB* dengan t sebagai *variabel*

C_{BA}(t) = *polinomial karakteristik BA* dengan t sebagai *variabel*

Akan dibuktikan bahwa $C_{AB}(t) = C_{BA}(t)$

$$
\begin{aligned}
C_{AB}(t) &= det(tI - AB) \\
&= det(tI - PBAP^{-1}) \\
&= det(PtIP^{-1} - PBAP^{-1}) \\
&= det(P(tI - BA)P^{-1}) \\
&= (det\ P)det(tI - BA)(det\ P^{-1}) \\
&= (det\ P)(det\ P^{-1})det(tI - BA) \\
&= det(PP^{-1})det(tI - BA) \\
&= det(tI - BA) \\
&= C_{BA}(t)
\end{aligned}
$$

Jadi *AB* dan *BA* merupakan *polinomial karakteristik* yang sama.

Dari **teorema 3.3.5** di atas *AB* dan *BA* serupa maka memiliki *polinomial karakteristik* yang sama. Teorema dibawah ini akan menunjukkan untuk *AB* dan *BA* yang tidak serupa.

Teorema 3.3.6

Jika $A,B \in M_n(\mathbf{C})$ maka AB dan BA mempunyai *polinomial karakteristik* yang sama.

Bukti :

$A,B \in M_n(\mathbf{C})$, ambil matriks $M_{2n}(\mathbf{C})$ sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} AB & O \\ B & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & O \\ B & BA \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa AB dan BA memiliki *polinomial karakteristik* yang sama.

$$\begin{pmatrix} AB & O \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & O \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix}$$

Sehingga untuk $\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{C})$ *nonsingular* dengan nilai *eigen* semuanya +1, maka determinannya = 1 ≠ 0. Maka

$$\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} AB & O \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ B & BA \end{pmatrix}$$

Akibatnya $\begin{pmatrix} AB & O \\ B & O \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} O & O \\ B & BA \end{pmatrix}$ serupa.

Misalkan $C_1 = \begin{pmatrix} AB & O \\ B & O \end{pmatrix}$ dan $C_2 = \begin{pmatrix} O & O \\ B & BA \end{pmatrix}$

Menurut **teorema 3.3.4**, C_1 dan C_2 mempunyai *polinomial karakteristik* yang sama yaitu:

$$C_{C1}(t) = C_{C2}(t)$$

$$det(tI\text{-}C_1) = det(tI\text{-}C_2)$$

$$det(tI\text{-}AB) = det(tI\text{-}BA)$$

$$C_{AB}(t) = C_{BA}(t)$$

Jadi *AB* dan *BA* memiliki *polinomial karakteristik* yang sama.

Akan tetapi **teorema 3.3.5** tidak berlaku sebaliknya, contoh :

Ambil $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sehingga $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dengan menggunakan **definisi 2.3.2.9** maka diperoleh

$$C_{AB}(t) = det(tI - AB)$$

$$= det\left(t\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$

$$= det\begin{pmatrix}t & -1 & 0\\0 & t & -1\\0 & 0 & t\end{pmatrix} = t^2 - 0 + 0 = t^2$$

$C_{BA}(t) = det(tI - BA)$

$$= det\left(t\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$

$$= det\begin{pmatrix}t & -1 & 0\\0 & t & 0\\0 & 0 & t\end{pmatrix} = t^2 - 0 + 0 = t^2$$

Berdasarkan **teorema 3.3.6** maka *AB* dan *BA* tidak serupa.

Dari definisi dan teorema tentang keserupaan di atas, berikut akan ditunjukkan kaitan antara keserupaan dengan *rank* matriks :

Teorema 3.3.7

Jika *A* dan *B* serupa, akan dibuktikan bahwa *rankA* = *rankB*.

Bukti :

Misalkan bahwa $B = PAP^{-1}$. Ambil $X = \{P_{e1}, P_{e2}, \ldots, P_{en}\}$ adalah basis di F_n. misalkan *S* adalah suatu basis di F_n, **Teorema 2.3.4.1** menunjukkan bahwa *P* adalah matriks transisi dari basis S ke basis X di F_n. Penerapan **teorema 2.3.4.2** menyebabkan

$$A = PA'P^{-1} = [T_A]_{X,X}$$

Teorema 2.3.4.3 memberikan bukti bahwa

$$rank(A) = rank\left([T_A]_{X,X}\right) = rank(B).$$ Jadi $rankA = rankB$.

Lemma 3.3.8

Misalkan A dan B adalah dua buah matriks *nilpotent*, maka A serupa B jika dan hanya jika $indA = indB$ dan $rankA^i = rankB^i$ untuk semua $i = 1, 2, \cdots, k$-1 dengan $k = indA$.

Bukti :

A adalah matriks *nilpotent* dengan *indeks* k maka $A^k = O$. Jika A serupa B, akan dibuktikan bahwa $indA = indB$ dan $rankA^i = rank\ B^i$ untuk semua $i = 1,2, \cdots, k$-1. Karena B *nilpoten*, misalkan indeksnya m, maka $B^m = O$. A serupa B maka terdapat $P \in GL_n(\mathbf{C})$ sehingga $A = PBP^{-1}$. Dengan menggunakan **teorema 2.3.5.2**, misalkan $A = SJ_1S^{-1}$ dan $B = QJ_2Q^{-1}$ dengan $S,Q \in GL_n(\mathbf{C})$ maka

$$\begin{aligned} A &= PBP^{-1} \\ &= PQJ_2Q^{-1}P^{-1} \\ &= PQJ_2(PQ)^{-1} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan **teorema 2.3.5.3** diperoleh :

$$\begin{aligned} A^k &= PQ(J_2)^k(PQ)^{-1} \\ &= PQ(J_2)^kQ^{-1}P^{-1} \end{aligned}$$

$= PB^kP^{-1}$

$= O$

Akibatnya $A^k = B^k = O$. Karena B adalah matriks *nilpotent* dengan indeks m, jadi haruslah $k = m$.

Akan dibuktikan bahwa $B^{k-1} \neq O$.

$$A^{k-1} = PQ(J_2)^i(PQ)^{-1}$$

$$= PQ(J_2)^{k-1}Q^{-1}P^{-1}$$

$$= PB^{k-1}P^{-1}$$

Karena $A^{k-1} \neq O$ maka $PB^{k-1}P^{-1} \neq O$, jadi $B^{k-1} \neq O$.

Untuk $i = 1, 2, \cdots, k\text{-}1$, $indA = indB$

$$A^i = PQ(J_2)^i(PQ)^{-1}$$

$$= PQ(J_2)^iQ^{-1}P^{-1}$$

$$= PB^iP^{-1}$$

A^i serupa B^i maka $rankA^i = rankB^i$.

Akan dibuktikan bahwa jika $indA = indB$ dan $rankA^i = rankB^i$ untuk semua $i = 1, 2, \cdots, k\text{-}1$ maka A serupa B. $A^k = B^k = O$ dan misalkan $A = SJ_1S^{-1}$ dan $B = QJ_2Q^{-1}$ dengan $S,Q \in GL_n(\mathbf{C})$, maka

$$A^k = SJ_1{}^kA^{-1} \text{ dan } B^k = QJ_2{}^kQ^{-1}$$

$$A^k = SOS^{-1}$$

$$= SQ(J_2)^kQ^{-1}S^{-1}$$

$$A = SQJ_2Q^{-1}S^{-1}$$

$$= SBS^{-1}$$

Jadi A serupa B.

Lemma 3.3.9

Misalkan A adalah matriks berukuran $m \times n$ dan B adalah matriks berukuran $n \times m$, akan dibuktikan bahwa terdapat $P \in GL_n(\mathbf{C})$ dan $Q \in GL_n(\mathbf{C})$ sehingga :

1. $A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$, $B = Q^{-1}\begin{pmatrix} D & O & O \\ O & N & T \\ O & S & Y \end{pmatrix}P^{-1}$

2. $AB = P\begin{pmatrix} D & O & O \\ O & N & T \\ O & O & O \end{pmatrix}P^{-1}$, $BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} D & O & O \\ O & N & O \\ O & S & O \end{pmatrix}Q$

3. AB serupa $diag(D, N_1)$, BA serupa $diag(D, N_2)$

Dengan $D \in GL_{r1}(\mathbf{C})$ dan N adalah matriks nilpoten berukuran $r_2 \times r_2$ dengan $r_1 + r_2 = r$ dan N_1 dan N_2 adalah matriks *nilpotent*.

Bukti :

Dengan cara penghitungan langsung, maka :

1. Ambil $A = P_1\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q_1$ dimana $P_1 \in GL_m(\mathbf{C})$ dan $Q_1 \in GL_n(\mathbf{C})$. kita tuliskan B sebagai $Q_1^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}P_1^{-1}$ dimana $B_1 \in M_r(\mathbf{C})$, dengan menggunakan bentuk *Jordan* pada B, kita asumsikan bahwa :

   $B_1 = P_2\begin{pmatrix} D & O \\ O & N \end{pmatrix}P_2^{-1}$. Dimana $P_2 \in GL_r(\mathbf{C})$, D $\in GL_{r1}(\mathbf{C})$ dan N adalah matriks *nilpotent* $r_2 \times r_2$ sedemikian sehingga $r_1 + r_2 = r$. Akibatnya kita dapatkan

$$B = Q_1^{-1}\begin{pmatrix} P_2^{-1} & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O & X_1 \\ O & N & X_2 \\ R_1 & R_2 & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_2 & O \\ O & I_{m-r} \end{pmatrix}P_1^{-1}$$

dan

$$A = P_1\begin{pmatrix} P_2^{-1} & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_2 & O \\ O & I_{m-r} \end{pmatrix}Q_1$$

kemudian ambil

$$P_3 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & D^{-1}X_1 \\ O & I_{r_2} & O \\ O & O & I_{m-r} \end{pmatrix}, \; Q_2 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O \\ O & I_{r_2} & O \\ R_1D^{-1} & O & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

maka kita mempunyai

$$B = Q_1^{-1}\begin{pmatrix} P_2^{-1} & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}Q_2\begin{pmatrix} D & O & O \\ O & N & X_2 \\ O & R_2 & Y \end{pmatrix}P_3\begin{pmatrix} P_2 & O \\ O & I_{m-r} \end{pmatrix}P_1^{-1}$$

dan

$$A = P_1\begin{pmatrix} P_2^{-1} & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}P_3^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q_2^{-1}\begin{pmatrix} P_2 & O \\ O & I_{m-r} \end{pmatrix}Q_1$$

Akhirnya dengan memisalkan

$$Q = Q_1^{-1}\begin{pmatrix} P_2^{-1} & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}Q_2, \; P = P_3\begin{pmatrix} P_2 & O \\ O & I_{m-r} \end{pmatrix}P_1^{-1}$$

$$Q^{-1} = Q_2^{-1}\begin{pmatrix} P_2 & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}Q_1, \; P^{-1} = P_1\begin{pmatrix} P_2^{-1} & O \\ O & I_{m-r} \end{pmatrix}P_3^{-1}$$

dan $T = X_2$, $S = R_2$, maka kondisi (1) dipenuhi.

2. Dari point (1) diatas diperoleh :

$$A = P_1 \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1$$

dan

$$B = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P_1^{-1}$$

maka diperoleh :

$$AB = P_1 \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1 Q_1^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P_1^{-1} = P_1 \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P_1^{-1} = P_1 \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix} P_1^{-1}$$

jadi

$$AB = P \begin{pmatrix} D & O & O \\ O & N & T \\ O & O & O \end{pmatrix} P^{-1}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh :

$$BA = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P_1^{-1} P_1 \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1 = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1 = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_3 & O \end{pmatrix} Q_1$$

jadi

$$BA = Q^{-1} \begin{pmatrix} D & O & O \\ O & N & O \\ O & S & O \end{pmatrix} Q$$

Maka kondisi (2) dipenuhi.

3. Dari point (2) diatas diperoleh :

$$AB = P \begin{pmatrix} D & O & O \\ O & N & T \\ O & O & O \end{pmatrix} P^{-1}$$

dan

$$BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} D & O & O \\ O & N & O \\ O & S & O \end{pmatrix} Q$$

Untuk N_1 dan N_2 matriks *nilpotent*, misalkan

$$\mathrm{O} = \begin{pmatrix} O & O \end{pmatrix}, \mathrm{O} = \begin{pmatrix} O \\ O \end{pmatrix}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} N & T \\ O & O \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} N & O \\ S & O \end{pmatrix}$$

maka diperoleh

$$AB = P\begin{pmatrix} D & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & N_1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} D & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & N_2 \end{pmatrix} Q$$

Jadi *AB* serupa *diag(D,* N_1*)* dan *BA* serupa *diag(D,* N_2*)*.

Dari **lemma 3.3.8** dan **lemma 3.3.9** diperoleh :

Teorema 3.3.10

Misalkan bahwa $A,B \in M_n(\mathbf{C})$ maka *AB* serupa *BA* jika dan hanya jika $ind(AB) = ind(BA)$ dan $rank(AB)^i = rank(BA)^i$ untuk i = 1, 2, ⋯, k-1, dimana k = *ind(AB)*.

Bukti :

(⟹)

AB dan *BA* serupa maka terdapat $P \in GL_n(\mathbf{C})$ sehingga $AB = PBAP^{-1}$.

k = $ind(AB)$ akibatnya $(AB)^k = P(BA)^k P^{-1}$ dan $(AB)^{k+1} = P(BA)^{k+1} P^{-1}$. Sedangkan $(AB)^k = (AB)^{k+1}$, maka

$$P(BA)^k P^{-1} = P(BA)^{k+1} P^{-1}$$

Sehingga :

$$(BA)^k = (BA)^{k+1}$$

Maka $ind(AB) = ind(BA) = k$, untuk i = 1, 2, ⋯, k-1

$(AB)^i = P(BA)^{k+1} P^{-1}$, maka $rank(AB)^i = rank(BA)^i$.

(⟸)

$ind(AB) = ind(BA) = k$, $rank(AB)^i = rank\ (BA)^i$ dengan i = 1, 2, ⋯, k-1. Pada **lemma 3.3.9** kita ketahui bahwa

$$AB = P\begin{pmatrix} D & O \\ O & N_1 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ dan } BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} D & O \\ O & N_2 \end{pmatrix} Q$$

Akibatnya

$$(AB)^i \text{ serupa } \left(\begin{pmatrix} D & O \\ O & N_1 \end{pmatrix}\right)^i \text{ maka } rank(AB)^i = rank\left(\begin{pmatrix} D & O \\ O & N_1 \end{pmatrix}\right)^i$$

$$(BA)^i \text{ serupa } \left(\begin{pmatrix} D & O \\ O & N_2 \end{pmatrix}\right)^i \text{ maka } rank(BA)^i = rank\left(\begin{pmatrix} D & O \\ O & N_2 \end{pmatrix}\right)^i$$

Untuk i = 1, 2, ⋯, k-1.

Karena $rank(AB)^i = rank(BA)^i$ untuk i = 1, 2, ⋯, k-1 maka

$$rank\left(\begin{pmatrix} D & O \\ O & N_1 \end{pmatrix}\right)^i = rank\left(\begin{pmatrix} D & O \\ O & N_2 \end{pmatrix}\right)^i$$

jadi $rankN_1^i = rankN_2^i$ untuk i = 1, 2, ⋯, k-1.

$Ind(AB) = ind(BA) = k$ maka $rank(AB)^k = rank(AB)^{k+1}$ dan

$rank(BA)^k = rank(BA)^{k+1}$ akibatnya $RankN_1^{\,k} = rankN_1^{\,k+1}$ dan $rankN_2^{\,k} = rankN_2^{\,k+1}$

Berdasarkan **lemma 3.3.8** maka N_1 serupa N_2. Dapat kita tulis

$$\begin{pmatrix} D & O \\ O & N_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & O \\ O & PN_2P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O \\ O & N_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ O & P^{-1} \end{pmatrix}$$

Maka $diag(D, N_2)$ serupa $diag(D, N_1)$ dengan AB serupa $diag(D, N_1)$ dan BA serupa $diag(D, N_2)$. Jadi AB serupa BA.

Dari pembahasan sebelumnya maka diperoleh **akibat 3.3.11** yang menunjukkan syarat cukup atau perlu mengenai kondisi rank matriks sehingga matriks AB dan BA dapat dikatakan serupa.

Akibat 3.3.11

3.3.11.1 AB serupa BA jika dan hanya jika $rank(AB)^i = rank(BA)^i$, $i = 1,2,\cdots$

3.3.11.2 $(AB)^D$ serupa $(BA)^D$

3.3.11.3 Jika $ind(AB) = ind(BA) = 1$ maka AB serupa BA

3.3.11.4 Jika $rank(AB) = rank(BA)$ dan $ind(AB) = 1$ maka AB serupa BA

3.3.11.5 Jika $rank(AB) = rank(BA) = rank(ABA)$ maka AB serupa BA

3.3.11.6 Jika $rank(A) = rank(AB) = rank(BA)$ maka AB serupa BA

3.3.11.7 Jika $rank(A) = rank(BA)$ dan $rank(B) = rank(AB)$ maka AB serupa BA

3.3.11.8 Jika $rank(A) = rank(AB)$ dan $rank(B) = rank(BA)$ maka AB serupa BA

Bukti :

3.3.11.1 Lihat **teorema 3.3.8**

3.3.11.2 Pada **teorema 3.3.8** diketahui bahwa

$$AB = P\begin{pmatrix} D & O \\ O & N_1 \end{pmatrix}P^{-1} \text{ dan } BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} D & O \\ O & N_2 \end{pmatrix}Q$$

$(AB)^D$ merupakan *inverse Drazin* pada matriks AB maka harus memenuhi tiga persamaan sebagai berikut :

1. $(AB)^k(AB)(AB)^D = (AB)^k$
2. $(AB)^D(AB)(AB)^D = (AB)^D$
3. $(AB)(AB)^D = (AB)^D(AB)$

Begitu pula dengan $(BA)^D$ harus memenuhi ketiga persamaan diatas juga. Maka $(AB)^D$ dan $(BA)^D$ yang memenuhi ketiga persamaan diatas masing-masing adalah

$$P\begin{pmatrix} D^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} \text{ dan } Q^{-1}\begin{pmatrix} D^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}Q. \text{ jadi } (AB)^D \text{ serupa } (BA)^D.$$

3.3.11.3 $Ind(AB) = ind(BA) = 1 = k$.

$Rank(AB) = rank\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}$. Karena $ind(AB) = 1$, maka

$rank(AB) = rank(AB)^2 = rank\begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & N_1^2 \end{pmatrix}$. Akibatnya

$rankN_1 = rankN_1^2$, $indN_1 = 1$ maka $N_1 = O$.

$$AB = P\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \text{ dan } BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q. \text{ jadi } AB \sim BA.$$

3.3.11.4 $Ind(AB) = 1$, maka

$$Rank(AB) = rank\begin{pmatrix} D & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & N_1 \end{pmatrix} = rank(AB)^2 = rank\begin{pmatrix} D^2 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & N_1^{\,2} \end{pmatrix}$$

Akibatnya

$rankN_1 = rankN_1^{\,2} = 0$, maka

$$N_1 = 0 \text{ dan } AB = P\begin{pmatrix} D & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix}P^{-1}$$

Karena $rank(AB) = rank(BA)$ maka

$$RankN_1 = rankN_2 = 0 \text{ dan } BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} D & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix}Q.$$

Jadi AB serupa BA.

3.3.11.5 $Rank(AB) = rank(BA) = rank(ABA)$

Pada **lemma 3.3.9** kita ketahui bahwa :

$$AB = P\begin{pmatrix} D & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & N_1 \end{pmatrix}Q,\ BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} D & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & N_2 \end{pmatrix}Q \text{ dan}$$

$$ABA = P\begin{pmatrix} D & O & O \\ O & N & O \\ O & O & O \end{pmatrix}Q = P\,diag(D, N, O)Q. \text{ akibatnya}$$

$rank\begin{pmatrix} N & O \\ S & O \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} N & T \\ O & O \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} N & O \\ O & O \end{pmatrix}$ dan terdapat T_0

dan S_0 sehingga $T = T_0N$ dan $S = S_0N$ yaitu

$$\begin{pmatrix} I & T_0 \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N & T \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -T_0 \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -S_0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N & O \\ S & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ S_0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

Maka $\begin{pmatrix} N & T \\ O & O \end{pmatrix}$ serupa $\begin{pmatrix} N & O \\ S & O \end{pmatrix}$. Berdasarkan bukti dari **lemma 3.3.9**, akibatnya AB serupa BA.

3.3.11.6 *Rank(A)* = *rank(AB)*, akibatnya kita mempunyai *R(A)* = *R(AB)*. Sehingga *R(BA)* = *R(ABA)*. Artinya *R(AB)* = *R(BA)* = *R(ABA)*. Dari **akibat 3.3.11.5**, maka AB serupa BA.

3.3.11.7 Berdasarkan **teorema 3.2.2** , maka *ind(AB)* = 1 dan *ind(BA)* = 1. Dari **akibat 3.3.11.3** maka AB serupa BA.

3.3.11.8 A^t dan B^t memenuhi **akibat 3.3.11.7**, maka A^tB^t serupa B^tA^t. akibatnya AB serupa BA.

Dari **akibat 3.3.11** untuk penerapannya misalkan sebagai contoh :

Ambil $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Maka diperoleh

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix}$$

dan

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & O \\ O & R \end{pmatrix}$$

Berdasarkan **teorema 3.3.10**, diperoleh *AB* serupa *BA*. Akan tetapi matriks *AB* dan *BA* tidak memenuhi **akibat 3.3.11.3** sampai . Hal ini menunjukkan bahwa **akibat 3.3.11.8** sampai dengan merupakan syarat cukup, bukan syarat perlu.

Dari sini dapat diketahui bahwa kondisi *rank* yang harus dipenuhi untuk perkalian matriks *AB* dan *BA* merupakan syarat cukup bukan syarat perlu.

Untuk selanjutnya, akan ditunjukkan contoh diperoleh dari pembahasan mengenai masalah *rank* matriks yang serupa.

Teorema 3.3.12

Misalkan $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} M & N \\ O & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} M_1 & N_1 \\ O & O \end{pmatrix}$$

jika $rankA = rankB = \text{r}$ dan M serupa M_1 dengan $M, M_1 \in M_r(\mathbf{C})$. Maka A serupa B.

Bukti :

Karena M serupa M_1 maka M^t serupa M_1. Terdapat suatu matriks P yang *invertible* sehingga $M_1 = PM^tP^{-1}$. Dengan demikian :

$$B = \begin{pmatrix} M_1 & N_1 \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & O \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M^t & P^{-1}N_1 \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & O \\ O & I \end{pmatrix}$$

Telah diketahui bahwa B serupa B^t, sehingga mengakibatkan

$$B \text{ serupa } \begin{pmatrix} M & O \\ \left(P^{-1}N_1\right)^t & O \end{pmatrix} \text{ dan } rank\begin{pmatrix} M \\ \left(P^{-1}N_1\right)^t \end{pmatrix} = \text{r}.$$

Dengan mengambil

$$R = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \text{ dan } S = \begin{pmatrix} M & N \\ \left(P^{-1}N_1\right)^t & O \end{pmatrix}$$

Sehingga $rankRS = rankSR = rankR =$ r. Dengan menggunakan **akibat 3.3.11.6** diperoleh RS serupa SR atau dapat juga ditulis sebagai

$$A \text{ serupa } \begin{pmatrix} M & O \\ \left(P^{-1}N_1\right)^t & O \end{pmatrix}.$$ Hal ini berarti A serupa B.

Teorema 3.3.13

Andaikan A adalah matriks $m \times n$ dan B adalah matriks $n \times m$. Maka ada $A^{(1,2)}$ dan $B^{(1,2)}$ sehingga

$$(AB)^D = B^{(1,2)}A^{(1,2)} \text{ dan } (BA)^D = A^{(1,2)}B^{(1,2)}.$$

Bukti :

Dari **lemma 3.3.9(2)**, diketahui bahwa

$$(AB)^{D} = P\begin{pmatrix} D^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} \text{ dan } (BA)^{D} = Q^{-1}\begin{pmatrix} D^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}Q.$$

Dengan menggunakan **lemma 3.3.9(1)**, ambil

$$B^{(1,2)} = P\begin{pmatrix} D^{-1} & O \\ O & \begin{pmatrix} N & T \\ S & Y \end{pmatrix}^{(1,2)} \end{pmatrix}Q \text{ dan } A^{(1,2)} = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}.$$ Sehingga

didapatkan $(AB)^{D} = B^{(1,2)}A^{(1,2)}$ dan $(BA)^{D} = A^{(1,2)}B^{(1,2)}$.