BAB III

KEKONVERGENAN LEMAH

Bab ini membahas inti kajian tugas akhir. Di dalamnya akan dibahas mengenai kekonvergenan lemah beserta sifat-sifat yang terkait dengannya. Sifat-sifat yang dikaji pada bab ini sebagian sudah sering dijumpai pada kekonvergenan kuat. Diantaranya sifat ketunggalan dan kelinearan. Bagaimana kaitan antara kekonvergenan lemah dan kekonvergenan kuat pun akan dibahas pada bab ini. Lebih jauh lagi diberikan syarat perlu dan cukup agar suatu barisan pada suatu ruang vektor bernorma konvergen secara lemah.

3.1 Definisi dan Sifat-sifatnya

Pada pasal 2.4 telah dibahas definisi dari fungsional linear terbatas f pada ruang vektor bernorma X dan ruang dual X' dari ruang vektor bernorma X. Konsep fungsional linear terbatas dan ruang dual ini akan digunakan pada definisi kekonvergenan lemah. Berikut ini adalah definisi dari kekonvergenan lemah.

Definisi 3.1.1

Diberikan X suatu ruang vektor bernorma dengan X' sebagai ruang dualnya. Barisan $\{x_n\}$ di X dikatakan konvergen secara lemah di X jika terdapat $x \in X$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

untuk setiap $f \in X'$.

Barisan $\{x_n\}$ *dikatakan konvergen secara lemah ke* x *dan dinotasikan dengan*

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Selanjutnya x *disebut limit lemah dari barisan* $\{x_n\}$.

Contoh 3.1.2

Diberikan suatu ruang Hilbert H dan misalkan $\{e_n\}$ barisan ortonormal di H. Akan ditunjukkan bahwa $\{e_n\} \rightharpoonup 0$.

Misalkan $f \in H'$ sebarang. Berdasarkan Teorema 2.5.6, terdapat secara tunggal $h_f \in H$ sedemikian sehingga untuk semua $h \in H$ berlaku $f(h) = \langle h, h_f \rangle$. Akibatnya, $f(e_n) = \langle e_n, h_f \rangle$. Selanjutnya, karena $\{e_n\}$ barisan ortonormal, menurut Teorema 2.4.12 , untuk semua $h \in H$ berlaku $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, h \rangle|^2 = \|h\|^2$. Ini berarti deret $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, h \rangle|^2$ konvergen ke $\|h\|^2$. Akibatnya, $\lim_{n\to\infty} |\langle e_n, h \rangle|^2 = 0$ untuk setiap $h \in H$. Karena $h_f \in H$, maka

$$\lim_{n\to\infty} f(e_n) = \lim_{n\to\infty} \langle e_n, h_f \rangle = 0$$

Atau

$$\lim_{n\to\infty} f(e_n) = f(0)$$

Karena f sebarang, maka berdasarkan Definisi 3.1.1 $\{e_n\}$ konvergen secara lemah ke 0. ■

Sebagaimana diketahui bahwa limit kuat dari barisan yang konvergen kuat adalah tunggal, demikian pula dengan limit lemah. Adapun ketunggalan dari limit lemah dijamin oleh teorema berikut.

Teorema 3.1.3

Jika suatu barisan di ruang bernorma X konvergen secara lemah, maka limit lemahnya tunggal.

Bukti.

Misalkan limit lemah dari $\{x_n\}$ tidak tunggal sebutlah x dan y. Berdasarkan Definisi 3.3.1

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \ dan\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(y)$$

untuk setiap $f \in X'$. Karena $\{f(x_n)\}$ barisan bilangan real, maka limitnya unik. Akibatnya, $f(x) = f(y)$. Dengan kelinearan dari f diperoleh $f(x-y) = 0$ untuk setiap $f \in X'$. Sehingga berdasarkan 2.6.3, $x - y = 0$ atau $x = y$.■

Selanjutnya, sebagaimana berlaku pada kekonvergenan kuat, sifat kelinearan juga berlaku pada kekonvergenan lemah. Sifat lain dari kekonvergenan kuat juga dimiliki kekonvergenan lemah, yaitu setiap subbarisan dari barisan yang konvergen lemah adalah juga konvergen lemah ke nilai yang sama. Dua buah teorema berturut-turut berikut membenarkan hal tersebut.

Teorema 3.1.4

Misalkan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ barisan di ruang bernorma X. Misalkan pula α dan β adalah sebarang skalar. Jika terdapat x dan y pada X sehingga $x_n \rightharpoonup x$ dan $y_n \rightharpoonup y$, *maka* $\alpha x_n + \beta y_n \rightharpoonup \alpha x + \beta y$.

Bukti.

Diketahui $x_n \rightharpoonup x$ dan $y_n \rightharpoonup y$ pada ruang bernorma X sehingga

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \text{ dan } \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y)$$

untuk setiap $f \in X'$. Jika α dan β adalah sebarang skalar, maka dengan sifat kelinearan dari f diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha f(x_n) + \beta f(y_n).$$

Karena $\{f(x_n)\}$ dan $\{f(y_n)\}$ barisan bilangan real, maka

$$\lim_{n\to\infty} \alpha f(x_n) + \beta f(y_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \beta \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Selanjutnya dengan kelinearan dari f, diperoleh

$$\alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y).$$

Akibatnya

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha x_n + \beta y_n) = f(\alpha x + \beta y).$$

Karena f sebarang di X', maka berdasarkan definisi $\alpha x_n + \beta y_n \rightharpoonup \alpha x + \beta y$. ■

Teorema 3.1.5

Jika barisan $\{x_n\}$ di ruang bernorma X konvergen secara lemah, maka sebarang subbarisan dari $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke nilai yang sama.

Bukti.

Diberikan suatu ruang bernorma X. Misalkan $\{x_n\}$ barisan di X yang konvergen secara lemah ke x dan $\{x_{n_k}\}$ sebarang subbarisan dari $\{x_n\}$. Karena $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke x, maka $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ untuk setiap $f \in X'$. Karena $\{f(x_n)\}$ barisan bilangan real, maka untuk setiap $f \in X'$ juga berlaku

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$$

atau

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f(x)$$

diperoleh

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) - \lim_{k\to\infty} f(x) = 0$$

Dengan menggunakan kelinearan dari limit barisan bilangan dan kelinearan dari f, diperoleh $\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k} - x\right) = f(0)$. Karena persamaan terakhir ini berlaku untuk setiap $f \in X'$, maka berdasarkan definisi $\left\{\left(x_{n_k}\right) - x\right\} \rightharpoonup 0$. Dengan kelinearan dari kekonvergen lemah yang telah ditunjukkan sebelumnya diperoleh $\left\{x_{n_k}\right\} \rightharpoonup x$.■

Teorema berikutnya menunjukkan bahwa jika barisan $\{x_n\}$ di ruang bernorma X konvergen secara lemah, katakanlah ke x, maka $\|x\|$ tidak akan melebihi limit bawah dari $\|x_n\|$.

Teorema 3.1.6

Jika barisan $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke x di ruang vektor bernorma X, maka

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$$

Bukti.

Untuk $x = 0$ jelas terpenuhi. Selanjutnya, misalkan $x \neq 0$ maka menurut Teorema 2.6.2, terdapat $f \in X'$ sehingga $f(x) = \|x\|$ dan $\|f\| = 1$. Karena $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke x, maka $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Dengan kata lain,

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| = 0$$

Karena

$$\left||f(x_n)| - |f(x)|\right| \leq |f(x_n) - f(x)|$$

Maka

$$\lim_{n\to\infty} \left||f(x_n)| - |f(x)|\right| = 0$$

Dengan kata lain,

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = |f(x)|$$

Ini berarti, untuk setiap $k > 0$ terdapat $N_k \in \mathbb{N}$ sehingga $\left||f(x_n)| - |f(x)|\right| < \frac{1}{k}$ untuk setiap $n \geq N_k$. Akibatnya, $|f(x)| - \frac{1}{k} < |f(x_n)|$ untuk setiap $n \geq N_k$. Darinya, diperoleh

$$|f(x)| - \frac{1}{k} \leq inf_{n\geq N_k} |f(x_n)|$$

Jika $k \to \infty$, maka $\frac{1}{k} \to 0$ dan $N_k \to \infty$.

Akibatnya,

$$\lim_{k\to\infty} |f(x)| - \frac{1}{k} \leq \lim_{k\to\infty} inf_{n\geq N_k} |f(x_n)|$$

maka

$$|f(x)| \leq \lim_{N_k\to\infty} inf_{n\geq N_k} |f(x_n)|$$

Karena $f(x) = \|x\|$ diperoleh

$$\|x\| \leq \lim\ inf |f(x_n)| \tag{3.1}$$

Kemudian, karena $\|f\| = 1$ dan karena teorema 2.5.5 , diperoleh

$$|f(x_n)| \leq \|f\| \|x_n\| = \|x_n\|$$

Akibatnya

$$\lim\ inf |f(x_n)| \leq \lim\ inf \|x_n\| \tag{3.2}$$

Dengan demikian, berdasarkan (3.1) dan (3.2), terbukti bahwa

$$\|x\| \leq \lim inf \|x_n\| \qquad \blacksquare$$

3.2 Keterkaitan Konvergen Lemah dan Konvergen Kuat

Seperti yang telah disinggung sebelumnya pada Bab I, topologi lemah adalah topologi yang paling lemah di antara topologi lainnya. Artinya, semua himpunan buka yang didefinisikan pada topologi ini juga termuat pada topologi lainya termasuk pada topologi kuat. Dengan demikian, timbul dugaan kekonvergenan kuat akan berlaku pada kekonvergenan lemah, namun tidak sebaliknya. Pada bagian ini akan ditunjukkan keterkaitan tersebut, yaitu keterkaitan antara barisan yang konvergen lemah dan konvergen kuat. Dimulai dengan teorema berikut yang membenarkan dugaan pertama, bahwa kekonvergenan kuat selalu mengakibatkan kekonvergenan lemah.

Teorema 3.2.1

Jika $\{x_n\}$ barisan di ruang vektor bernorma X konvergen secara kuat ke x, maka $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke x.

Bukti.

Diketahui dari Teorema 2.5.5 bahwa untuk setiap $f \in X'$ dan untuk setiap $x \in X$ berlaku

$$|f(x)| \leq \|x\|_X \|f\|_{X'}$$

Akibatnya, dengan kelinearan f diperoleh

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|x_n - x\|_X \|f\|_{X'}.$$

dan

$$0 \leq |f(x_n) - f(x)| \leq \|x_n - x\|_X \|f\|_{X'}$$

Karena $\{x_n\}$ konvergen secara kuat ke x, maka $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$. Akibatnya, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_X \, \|f\|_{X'} = 0$. Sehingga

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| = 0$$

Dengan kata lain, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Karena ini berlaku untuk setiap $f \in X'$, maka berdasarkan Definisi 1.3.1, $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke x. ■

Teorema di atas telah memberikan fakta bahwa kekonvergenan kuat selalu mengakibatkan kekonvergenan lemah. Sekarang, apakah kekonvergenan lemah akan selalu mengakibatkan kekonvergenan kuat? Contoh berikut akan menjawab pertanyaan tersebut.

Contoh 3.2.2

Misalkan $X = C[0,1]$ dan barisan $\{x_n\}$ di X, yaitu

$$x_n(t) = \begin{cases} nt & , t \in [0\,, 1/n] \\ 2 - nt & , t \in (1/n, 2/n] \\ 0 & , t \in (2/n, 1] \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa $x_n \rightharpoonup 0$ tetapi $x_n \nrightarrow 0$.

Andaikan $\{x_n\}$ tidak konvergen lemah ke nol. Ini berarti terdapat $f_0 \in X'$ sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} f_0(x_n) \neq f_0(x)$. Akibatnya, terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_0(x_n)| > \varepsilon_{0.}$$

Dalam hal ini, misalkan $f_0(x_n) > \varepsilon_{0.}$

Pilih sub barisan $\{x_{n_k}\}$ dari $\{x_n\}$ sedemikian sehingga $n_{k+1} > 2n_k$ dengan $f_0(x_{n_k}) > \varepsilon_0$. Kemudian definisikan

$$y_K \coloneqq \sum_{k=1}^{K} x_{n_k}(t)$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$n_{k+1} > 2n_k \quad \text{atau} \quad n_k < \tfrac{1}{2} n_{k+1} \quad \text{atau} \quad 2/n_{k+1} < 1/n_k$$

maka

$$y_K = x_{n_1}(t) + x_{n_2}(t) + \cdots + x_{n_K}(t)$$

$$= \begin{cases} n_1 t + n_2 t + \cdots + n_K t & , t \in \bigcap_{k=1}^{K} [0\,, 1/n_k] \\ (2 - n_1 t) + (2 - n_2 t) + \cdots + (2 - n_K t) & , t \in \bigcap_{k=1}^{K} (1/n_k, 2/n_k] \\ 0 & , t \in \bigcap_{k=1}^{K} (2/n_k\,, 1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (n_1 + n_2 + \cdots + n_K\,)t & , t \in [0\,, 1/n_K] \\ 0 & , t \in (2/n_k\,, 1] \end{cases}$$

Perhatikan bahwa $y_k(t)$ naik pada $[0\,, 1/n_K]$. Akibatnya, $y_k(t)$ mencapai maksimum di $t_0 = 1/n_K$. Sementara itu,

$$n_1 < \tfrac{1}{2} n_2$$

$$n_1 + n_2 < \tfrac{1}{2} n_2 + n_2 = \tfrac{3}{2} n_2$$

$$n_1 + n_2 + n_3 < \tfrac{3}{2} n_2 + n_3 < \tfrac{3}{4} n_3 + n_3 = \tfrac{7}{4} n_3$$

...

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_K < \frac{2^K - 1}{2^{K-1}} n_K$$

Dengan demikian,

$$y_K(t_0) = x_{n_1}\left(\tfrac{1}{n_K}\right) + x_{n_2}\left(\tfrac{1}{n_K}\right) + \cdots + x_{n_K}\left(\tfrac{1}{n_K}\right)$$

$$= (n_1 + n_2 + \cdots + n_K\,)\, {}^{1}\!/_{n_K}$$

$$< \frac{2^K - 1}{2^{K-1}} n_K \,.\, {}^{1}\!/_{n_K}$$
$$= \frac{2^K - 1}{2^{K-1}}$$
$$= 2 - \frac{1}{2^{K-1}} < 2.$$

Diperoleh

$$y_K(t) = \sum_{k=1}^{K} x_{n_k}(t) < 2$$

Akibatnya, $|y_K| < 2$ untuk semua K. Selain itu, diperoleh

$$f(y_K) = \sum_{k=1}^{K} f(x_{n_k}) > K\varepsilon_0$$

Karena ketaksamaan di atas berlaku untuk semua K dan $|y_K| < 2$, maka f tak terbatas. Ini kontradiksi, karena f fungsional linear terbatas. Dengan demikian, pengandaian salah. Haruslah f konvergen secara lemah ke nol.

Kemudian, pilih $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Perhatikan bahwa untuk semua $n \epsilon \mathbb{N}$ berlaku $\|x_n\| = \max_{t\epsilon[0,1]}|x_n(t)| = 1 > \varepsilon_1$. Ini berarti (x_n) tidak konvergen secara kuat ke nol. Dengan demikian telah ditunjukkan bahwa (x_n) konvergen secara lemah ke nol, tapi tidak konvergen secara kuat ke nol. ■

Contoh di atas menunjukkan bahwa ada barisan yang konvergen lemah tapi tidak konvergen kuat. Namun demikian, suatu barisan (x_n) pada ruang vektor bernorma X yang konvergen lemah akan selalu konvergen kuat jika ruang X berdimensi hingga. Fakta tersebut dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 3.2.3

Misalkan (x_n) suatu barisan di ruang vektor bernorma X yang konvergen secara lemah ke x. Jika X berdimensi hingga, maka barisan (x_n) konvergen secara kuat ke x.

Bukti:

Diberikan X ruang vektor bernorma berdimensi k dengan $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ adalah basis untuk X. Misalkan (x_n) suatu barisan di ruang bernorma X yang konvergen secara lemah ke x. Karena $x_n \in X$ untuk setiap $n = 1,2,\dots$, maka untuk setiap $n = 1,2,\dots$, x_n dapat dinyatakan sebagai

$$x_n = \alpha_1^{(n)} e_1 + \alpha_2^{(n)} e_2 + \cdots + \alpha_k^{(n)} e_k.$$

Kemudian karena dari definisi x juga termuat dalam X, maka x dapat dinyatakan sebagai

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_k e_k.$$

Selanjutnya, didefinisikan fungsional linear $f_i \in X'$, yaitu

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1\,, & i = j \\ 0\,, & i \neq j \end{cases}$$

Karena (x_n) konvergen secara lemah ke x, maka untuk setiap $i = 1,2,\dots,k$, $f_i(x_n) \to f_i(x)$. Sedangkan berdasarkan definisi dari f_i dan kelinearan dari f diperoleh

$$\begin{aligned} f_i(x_n) &= f_i(\alpha_1^{(n)} e_1 + \alpha_2^{(n)} e_2 + \cdots + \alpha_i^{(n)} e_i + \cdots + \alpha_k^{(n)} e_k) \\ &= \alpha_1^{(n)} f_i(e_1) + \alpha_2^{(n)} f_i(e_2) + \cdots + \alpha_i^{(n)} f_i(e_i) + \cdots + \alpha_k^{(n)} f_i(e_k) \\ &= \alpha_1^{(n)}.0 + \alpha_2^{(n)}.0 + \cdots + \alpha_i^{(n)}.1 + \cdots + \alpha_k^{(n)} 0 \end{aligned}$$

$$= \alpha_i^{(n)}$$

dan

$$\begin{aligned} f_i(x) &= f_i(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_i e_i + \cdots + \alpha_k e_k) \\ &= \alpha_1 f_i(e_1) + \alpha_2 f_i(e_2) + \cdots + \alpha_i f_i(e_i) + \cdots + \alpha_k f_i(e_k) \\ &= \alpha_1 . 0 + \alpha_2 . 0 + \cdots + \alpha_i . 1 + \cdots + \alpha_k . 0 \\ &= \alpha_i . \end{aligned}$$

Akibatnya, $\alpha_i^{(n)} \to \alpha_i$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, k$. Selanjutnya, misalkan $M = \text{maks}_i \|e_i\|$. Diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $\alpha_i^{(n)} \to \alpha_i$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, k$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq \mathbb{N}$ dan $i = 1,2, \dots, k$, berlaku $\left|\alpha_i^{(n)} - \alpha_i\right| < \frac{\varepsilon}{Mk}$. Akibatnya, bersamaan dengan penggunaan ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \left\|\sum_{i=1}^{k} \alpha_i{}^{(n)} e_i - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i\right\| \\ &= \left\|\sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i{}^{(n)} - \alpha_i\right) e_i\right\| \\ &\leq \left\|\left(\alpha_1{}^{(n)} - \alpha_1\right) e_1\right\| + \cdots + \left\|\left(\alpha_k{}^{(n)} - \alpha_k\right) e_k\right\| \\ &= \left|\alpha_1{}^{(n)} - \alpha_1\right| \|e_1\| + \cdots + \left|\alpha_k{}^{(n)} - \alpha_k\right| \|e_k\| \\ &< \frac{\varepsilon}{Mk} M + \cdots + \frac{\varepsilon}{Mk} M \\ &= k\left(\frac{\varepsilon}{Mk} M\right) = \varepsilon . \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, terbukti bahwa $x_n \to x$ atau barisan x_n konvergen secara kuat ke x. ■

Teorema 3.1.3 di muka menunjukkan bahwa dalam ruang berdimensi berhingga, kekonvergenan secara lemah mengakibatkan kekonvergenan secara kuat. Di sisi lain, telah jelas bahwa kekonvergenan secara kuat mengakibatkan kekonvergenan secara lemah. Dengan demikian, pada ruang berdimensi hingga, kekonvergenan secara lemah ekuivalen dengan kekonvergenan secara kuat. Namun, tidak selalu kekonvergenan lemah tidak ekuivalen dengan kekonvergenan kuat pada ruang berdimensi tak hingga. Contoh berikut akan menegaskan hal yang demikian.

Contoh 3.2.4

Akan ditunjukkan bahwa pada l^1, kekonvergenan lemah mengakibatkan kekonvergenan kuat. Andaikan kekonvergena lemah tidak mengakibatkan kekonvergenan kuat, maka terdapat barisan $\{y_n^n\} = \{y_n^1, y_n^2, ...\}$ di l^1 sedemikian sehingga $y_n^n \rightharpoonup y_n$ tapi $y_n^n \not\rightharpoonup y_n$, dimana $y_n^k = \left(y_1^k, y_1^k, ...\right)$ dan $y_n = (\, y_1, y_2, ...)$. $y_n^n \rightharpoonup y_n$ artinya, untuk setiap $f \in (l^1)'$ berlaku $f(y_n^n) \to f(y_n)$. Dengan kata lain,

$$|f(y_n^n) - f(y_n)| = |f(y_n^n - y_n)| \to 0 \; ...(3.3)$$

Misalkan $\{e_n\}$ basis untuk l', dimana

$$e_1 = (1, 0, 0, ...)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, ...)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, ...)$$

...

Maka dapat dituliskan $y_n^n = \sum_{j=1}^{\infty} y_j^n \, e_j$ dan $y_n = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \, e_j$. Akibatnya,

$$|f(y_n^n) - f(y_n)| = \left|f\left(\sum_{j=1}^{\infty} y_j^n \, e_j - \sum_{j=1}^{\infty} y_j \, e_j\right)\right|$$

$$= \left|f\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(y_j^n - y_j\right) e_j\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(y_j^n - y_j\right) f\left(e_j\right)\right|$$

Sehingga dari (3.3) diperoleh

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(y_j^n - y_j\right) f\left(e_j\right)\right| \to 0$$

Untuk setiap $f \in (l^1)'$.

Contoh 2.5.6 menunjukkan bahwa, $(l^1)' = l^\infty$ dan telah ditunjukkan bahwa untuk setiap $f \in (l^1)'$ terdapat $f(e_i) \in l^\infty$ dimana $\{e_i\} \in l^1$. Akibatnya, dengan memisalkan $\left(y_j^n - y_j\right) = x_j^n$. Diperoleh

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j^n \, z_j\right| \to 0 \tag{3.4}$$

untuk setiap $z = (z_1, z_2, \dots) \in l^\infty$. Selanjutnya, $y_n^n \nrightarrow y_n$, artinya

$$\|y_n^n - y_n\| = \sum_{j=1}^{\infty}\left|y_j^n - y_j\right| = \sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^n\right| > \varepsilon_0 \tag{3.5}$$

untuk suatu $\varepsilon_0 > 0$ dan n = 1, 2, ….

Selanjutnya pilih $z_j = \delta_{jk}, j = 1, 2, \dots$ dimana

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 \; jika \; j \neq k \\ 1 \; jika \; j = k \end{cases}$$

Sehingga dari (3.4) diperoleh

$$x_k^{(n)} \to 0, \qquad k = 1, 2, \tag{3.6}$$

Kemudian misalkan $m_0 = n_0 = 0$ dan definisikan secara induktif barisan $\{m_k\}$ dan $\{n_k\}$ sebagai berikut. Jika m_{k-1} dan n_{k-1} diberikan, misalkan n_k bilangan bulat terkecil yang memenuhi $n > n_{k-1}$ sehingga

$$\sum_{j=1}^{m_{k-1}}\left|x_j^{(n_k)}\right| < {}^{\varepsilon}\!/_{5} \tag{3.7}$$

Dan m_k bilangan bulat terkecil yang memenuhi $m > m_{k-1}$ sehingga

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(n_k)}\right| < {}^{\varepsilon}\!/_{5} \tag{3.8}$$

Sekarang misalkan $z = (z_1, z_2, \dots)$ sebarang vektor di l^∞. Definiskan

$$z_j = sgn\, x_j^{(n_k)}, \quad m_{k-1} < j \leq m_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dimana $sgn \propto$ adalah fungsi signum yang didefinisikan menjadi $\frac{\propto}{|\propto|}$ untuk $\propto \neq 0$, 0 untuk $\propto = 0$. Jadi, dari (3.7) dan (3.8)

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(z_j x_j^{(n_k)} - \left|x_j^{(n_k)}\right|\right)\right| \leq 2\sum_{j=1}^{m_{k-1}}\left|x_j^{(n_k)}\right| + 2\sum_{j=m_k}^{\infty}\left|x_j^{(n_k)}\right| < \frac{4\varepsilon}{5}$$

Dari (3.5) diperoleh

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} z_j x_j^{(n_k)}\right| > \varepsilon/5, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Hal ini kontradiksi dengan (3.4). Dengan demikian pengandaian salah, haruslah kekonvergenan lemah mengakibatkan kekonvergenan kuat pada ruang l^1. ■

3.3 Syarat Suatu barisan Konvergen Lemah

Seperti yang telah diketahui, kemonotonan dan keterbatasan suatu barisan di $\mathbb{R}$ menjadi syarat agar barisan tersebut konvergen secara kuat. Sekarang bagaimana syarat agar suatu barisan di suatu ruang bernorma konvergen secara lemah? Sebelum sampai pada penjelasan tersebut akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa suatu barisan yang konvergen secara lemah selalu terbatas secara seragam dalam norma. Keterbatasan secara seragam dalam norma ini akan menjadi salah satu syarat agar suatu barisan konvergen secara lemah. Untuk menunjukkannya, diperlukan definisi berikut.

Definisi 3.3.1 (Kategori)

Suatu himpunan bagian M dari ruang metrik X dikatakan

a. *Tidak padat, jika $\overline{M}$ tidak memiliki titik interior.*

b. *Kategori 1, jika M merupakan gabungan dari sejumlah terbilang himpunan yang tidak padat di X.*

c. *Kategori 2, jika M bukan kategori 1 di X.*

Teorema 2.1.13 menunjukkan bahwa ruang vektor bernorma adalah juga ruang metrik. Dengan demikian, semua Teorema yang berlaku pada ruang metrik berlaku juga pada ruang vektor bernorma.

Teorema berikut ini akan menunjukkan bahwa setiap ruang metrik lengkap yang tak kosong termasuk ke dalam kategori 2. Dengan kata lain, setiap ruang Banach tak kosong termasuk ke dalam kategori 2.

Teorema 3.3.2 (Baire-Hausdorff)

Suatu ruang metrik lengkap yang tak kosong adalah kategori 2.

Bukti.

Misalkan $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ koleksi dari himpunan-himpunan yang gabungannya membentuk ruang metrik lengkap X. Andaikan X termasuk ke dalam kategori 1. Maka untuk setiap n=1,2,…, M_n tidak memiliki titik interior atau M_n tidak memuat himpunan buka tak kosong.

Sekarang, perhatikan M_1. Karena M_1 tidak memuat himpunan buka tak kosong maka ${M_1}^c$ buka dan $\overline{{M_1}^c} = X$. Sehingga ${M_1}^c$ memuat bola tutup $\overline{B_1}(x_1, r_1)$ dengan titik pusat x_1 dan beradius r_1. Asumsikan $0 < r_1 < \frac{1}{2}$. Dengan argumen yang sama, ${M_2}^c$ memuat bola tutup $\overline{B_2}(x_2, r_2)$ yang dimuat di $\overline{B_1}$ sehingga

$0 < r_1 < \frac{1}{2^2}$. Dengan terus mengulang argument yang sama diperoleh barisan $\{\bar{B}_n\}$ dari bola-bola tutup $\bar{B}_n(x_n, r_n)$ dengan

$$0 < r_n < \frac{1}{2^n}, \quad \bar{B}_{n+1} \subseteq \bar{B}_n \text{ dan } \bar{B}_n \cap M_n = \emptyset, \quad \text{untuk setiap } n = 1,2, \ldots$$

Dengan demikian, untuk setiap $n < m$, $x_m \in \bar{B}_n$ sehingga $d(x_n, x_m) < r_n < \frac{1}{2^n}$. Akibatnya,

$$0 \leq \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) < \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{2^n}$$

Karena $\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, maka $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$. Dengan demikian, barisan (x_n) dari titik-titik pusat dari bola-bola tutup di atas membentuk barisan Cauchy. Selanjutnya, misalkan x menjadi titik limit dari barisan Cauchy (x_n). Asumsi bahwa X ruang yang lengkap mengakibatkan $x \in X$. Sehingga dari sifat ketak samaan segitiga dari metrik diperoleh

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x) \leq r_n + d(x_m, x)$$

Akibatnya bersamaan dengan penggunaan sifat kelinearan limit diperoleh

$$\lim_{m\to\infty} d(x_n, x) \leq \lim_{m\to\infty} \big(r_n + d(x_m, x)\big) = \lim_{m\to\infty} r_n + \lim_{m\to\infty} d(x_m, x)$$

Karena (x_n) konvergen kuat ke x maka $\lim_{m\to\infty} d(x_m, x) = 0$. Akibatnya,

$$d(x_n, x) \leq r_n$$

Dengan kata lain, $x \in \bar{B}_n$ untuk setiap $n = 1,2, \ldots$. Sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, x tidak termuat dalam himpuan M_n. Artinya, x tidak termuat dalam $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = X$. Ini kontradiksi dengan asumsi bahwa X ruang lengkap. Dengan demikian pengandaian salah haruslah X bukan kategori 1. Artinya, X termasuk ke dalam kategori 2. ■

Teorema selanjutnya akan membahas mengenai Prinsip Keterbatasan Seragam yang dikenal sebagai Teorema Banach-Steinhaus. Teorema tersebut menjelaskan X suatu ruang Banach kemudian suatu barisan $(f_v)_{v\in\mathbb{N}}$ terbatas pada setiap titik $x \epsilon X$ ternyata barisan $(f_v)_{v\in\mathbb{N}}$ terbatas secara seragam. Dengan kata lain, keterbatasan titik demi titik mengakibatkan keterbatasan seragam.

Teorema 3.3.3

Jika X ruang Banach dan $\{f_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ koleksi fungsional linear terbatas pada X sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ terdapat $L(x) > 0$ sehingga

$$|f_v(x)| \leq L(x)$$

untuk semua f_v, maka terdapat konstanta $c > 0$ sehingga

$$\|f_v\| \leq c \text{ untuk semua } f_v.$$

Bukti.

Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ misalkan $A_k \subset X$ yang didefinisikan oleh

$$A_k = \{x \in X \,|\, |f_v(x)| \leq k, \forall\, v \in \mathbb{N}\}$$

Misalkan pula (x_j) sebarang barisan di A_k yang konvergen kuat ke x. Artinya, untuk setiap $= 1,2, \ldots$ $|f_v(x_j)| \leq k$. Kemudian, karena f_v fungsional linear terbatas pada X, maka menurut Teorema 2.3.5 f_v kontinu pada X. Akibatnya, $|f_v(x)| \leq k$. Dengan kata lain, $x \in A_k$ dan akibatnya A_k himpunan tutup.

Diketahui bahwa keterbatasan f_v mengakibatkan untuk setiap $x \in X$ terdapat $L(x) > 0$ sehingga $|f_v(x)| \leq L(x)$. Akibatnya, untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $k > L(x) > 0$ diperoleh

$$|f_v(x)| \leq L(x) < k \text{ untuk setiap } x \in X.$$

Akibatnya, untuk setiap $x \in X$ termuat pada suatu A_k. Dengan demikian, $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Karena X lengkap, maka menurut Teorema 3.3.2, X termasuk ke dalam kategori 2. Artinya, terdapat A_k, sebutlah A_{k_0}, yang memuat himpunan buka tak kosong $B_0 = \left\{x \in A_{k_0} \middle| \|x_0 - x\| < r, r > 0\right\}$.

Selanjutnya, misalkan $x \neq 0 \in X$. Konstruksi

$$z = x_0 + \gamma x \quad \text{dimana} \quad \gamma = \frac{r}{2\|x\|} \tag{3.1}$$

Maka $z = x_0 + \frac{r}{2}$ sehingga $\|z - x_0\| < r$. Akibatnya, $z \in B_0 \subset A_{k_0}$ sehingga berdasarkan definisi dari A_k diperoleh $|f_v(z)| \leq k_0$ untuk setiap $v \in \mathbb{N}$. Kemudian, karena $x_0 \epsilon B_0$ maka $|f_v(x_0)| \leq k_0$. Berdasarkan (3.1), $x = \frac{1}{\gamma}(z - x_0)$ sehingga untuk setiap $v \in \mathbb{N}$ diperoleh

$$\begin{aligned}
|f_v(x)| &= \left|f_v(\tfrac{1}{\gamma}(z - x_0))\right| \\
&= \left|\tfrac{1}{\gamma} f_v(z - x_0)\right| \\
&\leq \tfrac{1}{\gamma}(|f_v(z)| + |f_v(x_0)|) \\
&\leq \tfrac{2\|x\|}{r}(k_0 + k_0) \\
&= \tfrac{4}{r}\|x\| k_0
\end{aligned}$$

Akibatnya, untuk setiap $v \in \mathbb{N}$,

$$\|f_v\| = sup_{\|x\|\neq 0}|f_v(x)| \leq \frac{4}{r}\|x\|k_0.$$

Ini menunjukkan bahwa terdapat $c = \frac{4}{r}\|x\|k_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $v \in \mathbb{N}$ berlaku $\|f_v\| < c$. ■

Selanjutnya, teorema berikut ini adalah konsekuensi dari teorema Banach-Steinhaus.

Akibat 3.3.4

Jika $\{x_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ koleksi titik-titik di ruang Banach X sedemikian sehingga untuk setiap fungsional linear terbatas $f \in X'$ terdapat $M(f) > 0$ sehingga

$$|f(x_v)| \leq M(f)$$

untuk semua $v \in \mathbb{N}$, maka terdapat konstanta $c > 0$ sehingga

$$\|x_v\| \leq c \text{ untuk semua } v \in \mathbb{N}.$$

Bukti.

Teorama 2.5.7 memberikan fakta bahwa Ruang dual X' dari ruang bernorma X merupakan ruang Banach. Selanjutnya, misalkan $\left(g_{x_v}\right)_{v\in\mathbb{N}}$ suatu barisan di X'' dengan $(x_v)_{v\in\mathbb{N}}$ barisan di X. Maka akan terdapat $M(f) > 0$ sedemikian sehingga

$$\left|g_{x_v}(f)\right| \leq M(f)$$

untuk setiap $f \in X'$. Berdasarkan definisi ruang dual kedua $g_{x_v}(f) = f(x_v)$, maka

$$\left|g_{x_v}(f)\right| = |f(x_v)| \leq M(f)$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa menurut Teorema Banach-Stanhauus terdapat $c > 0$ sedemikian sehingga

$$\left\| g_{x_v}(f) \right\| \leq c$$

Untuk setiap $v \in \mathbb{N}$. Akibatnya, bersamaan dengan penggunaan Teorema 2.5.8 diperoleh

$$\|x_v\| \leq c$$

untuk semua $v \in \mathbb{N}$.■

Selanjutnya, Teorema 3.3.4 di atas akan mengakibatkan barisan $\{x_n\}$ di ruang bernorma X yang konvergen secara lemah terbatas secara seragam dalam norma.

Teorema 3.3.5

Barisan $\{x_n\}$ di ruang vektor bernorma X yang konvergen secara lemah terbatas secara seragam dalam norma, yaitu terdapat $c > 0$ sehingga

$$\|x_n\| \leq c.$$

Bukti.

Diberikan X suatu ruang bernorma. Misalkan $\{x_n\}$ barisan X yang konvergen, katakanlah ke x. Sehingga untuk setiap $\in X'$ $f(x_n) \to f(x)$. Akibatnya, $f(x_n)$ terbatas untuk setiap $f \in X'$. Dengan kata lain, terdapat $M(f) > 0$ sedemikian sehingga $\left| g_{x_v}(f) \right| \leq M(f)$. Dengan kondisi yang demikian, Teorema 3.3.4 menjamin bahwa terdapat $c > 0$ sedemikian sehingga $\|x_n\| \leq c$, ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}$ terbatas secara seragam dalam norma. ■

Teorema di atas menunjukan bahwa setiap barisan $\{x_n\}$ pada suatu ruang bernorma X yang konvergen secara lemah ke x akan selalu terbatas secara seragam. Lebih jauh lagi, jika $f(x_n) \to f(x)$ untuk setiap f pada suatu himpunan bagian dari X' yang rapat di X' maka kebalikan dari teorema tersebut berlaku. Kondisi yang demikian yang merupakan syarat cukup dan perlu suatu barisan di suatu ruang vektor bernorma konvergen secara lemah. Teorema berikut ini akan menegaskan hal tersebut.

Teorema 3.3.6

Barisan $\{x_n\}$ di ruang vektor bernorma X memenuhi kondisi berikut

i. *Barisan $\{x_n\}$ terbatas secara seragam dalam norma*

ii. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ *untuk setiap $f \in D$ dengan $D \subseteq X'$ yang rapat di X'*

Jika dan hanya jika (x_n) konvergen secara lemah ke x.

Bukti.

($\Longrightarrow$) Misalkan $\{x_n\}$ sebarang barisan di ruang bernorma X. Misalkan pula $D \subseteq X'$ himpunan yang rapat di X'. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena D rapat, maka $\overline{D} = X$. Artinya, untuk setiap $g \in X'$ terdapat $h \in D$ sedemikian sehingga $\|g - h\| < \varepsilon$. Dengan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$\begin{aligned} |g(x_n) - g(x)| &= |g(x_n) - h(x_n) + h(x_n) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq |g(x_n) - h(x_n)| + |h(x_n) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &= |(g-h)(x_n)| + |h(x_n) - h(x)| + |(h-g)(x)| \\ &\leq \|g-h\|\|x_n\| + |h(x_n) - h(x)| + \|h-g\|\|x\| \end{aligned}$$

Selanjutnya, asumsikan bahwa $\{x_n\}$ terbatas secara seragam dalam norma, yaitu $\|x_n\| \leq c$ untuk suatu $c > 0$. Akibatnya, diperoleh

$$|g(x_n) - g(x)| \leq \varepsilon c + |h(x_n) - h(x)| + \varepsilon\|x\|$$

Karena $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ atau $\lim_{n\to\infty}|f(x_n) - f(x)| = 0$ untuk setiap $f \in D$, maka

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}|g(x_n) - g(x)| &\leq \varepsilon c + \lim_{n\to\infty}|h(x_n) - h(x)| + \varepsilon\|x\| \\ &= \varepsilon(c + \|x\|)\end{aligned}$$

Karena ketaksamaan terakhir berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}|g(x_n) - g(x)| = 0 \quad \text{atau} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$$

Karena $g \in X'$ sebarang, maka $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke x.

($\Leftarrow$) Misalkan $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke x. Sudah ditunjukkan pada Teorema 3.3.5 bahwa $\{x_n\}$ terbatas secara seragam. Selanjutnya karena $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke x, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ untuk setiap $f \in X'$. Karena $D \subseteq X'$, maka pastilah $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ untuk setiap $f \in D$. ■