BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Misalkan diberikan suatu ruang vektor X atas lapangan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Jika X dilengkapi dengan suatu norma $\|.\|$, maka dikenal bahwa X suatu ruang vektor bernorma. Kemudian diperoleh hubungan bahwa norma pada X tersebut dapat mendefinisikan suatu fungsi metrik d pada X yang didefinisikan oleh

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

untuk setiap x dan y anggota X. Akibatnya, ruang vektor bernorma X merupakan suatu ruang metrik. Selanjutnya, untuk sebarang $p \in X$ dan sebarang $\varepsilon > 0$, misalkan $B(p, \varepsilon)$ menotasikan himpunan dari titik-titik di X yang jaraknya terhadap p kurang dari ε, yaitu

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in X \mid \ d(x, y) = \|x - y\| < \varepsilon\} \tag{1.1}$$

$B(p, \varepsilon)$ ini mendefinisikan bola buka pada X. Lebih jauh lagi, keluarga dari semua bola buka yang didefinisikan pada (1.1) membangun suatu topologi bagi X. Akibatnya, X yang semula diketahui suatu ruang vektor bernorma kemudian juga ruang metrik, ternyata membangun ruang topologi. Topologi yang himpunan bukanya didefinisikan seperti pada (1.1) adalah **topologi kuat** atau **topologi norma** dari X.

Selanjutnya, jika ada topologi lain dari X sedemikian sehingga topologi ini merupakan subkoleksi dari topologi di atas, maka topologi baru ini dikatakan lebih lemah dari topologi di atas. Pada ruang vektor bernorma X, selain dikenal topologi kuat (topologi norma), dikenal pula **topologi lemah**. Topologi ini adalah topologi terlemah di antara semua topologi pada X yang membuat semua fungsi pada X kontinu. Topologi lemah dari X ini didefinisikan menggunakan ruang dual X' dari X. Ruang dual ini terdiri dari semua fungsional linear f yang membawa X ke lapangan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ dan kontinu terhadap topologi kuat. Topologi lemah ini dibangun oleh koleksi himpunan berbentuk $f^{-1}(U)$ dimana $f \in X'$ dan U adalah subset buka pada lapangan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Sehingga bola buka pada topologi lemah ini didefinisikan oleh

$$B'(p,\varepsilon) = \{x \in X \mid \|f(x) - f(p)\| < \varepsilon, f \in X'\}.$$

Konsep topologi dari suatu ruang vektor bernorma ini erat kaitannya dengan konsep barisan dari ruang tersebut. Lebih jauh, pendefinisian kekonvergenan dari suatu barisan di X bergantung pada topologi mana yang sedang digunakan. Kekonvergenan yang selama ini digunakan adalah kekonvergenan pada topologi kuat, yang populer dengan nama konvergen kuat (*strongly convergence*) atau konvergen norma, yang selanjutnya disebut konvergen saja.

Misalkan barisan (x_n) di X konvergen secara kuat ke x. Untuk setiap himpuan buka $B(x,\varepsilon)$ yang memuat x terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $n \geq n_0$ maka $x_n \in B(x,\varepsilon)$. Dengan kata lain, barisan (x_n) di X konvergen secara kuat ke x jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $n \geq n_0$ maka $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Kekonvergenan pada topologi kuat memiliki beberapa sifat, diantaranya sifat ketunggalan, keterbatasan dari barisannya, dsb. Berdasarkan uraian di muka, penulis tertarik untuk membahas kekonvergenan pada topologi lain, khususnya topologi lemah. Apakah sifat-sifat kekonvergenan yang berlaku pada topologi kuat diwariskan pada kekonvergenan pada topologi lemah. Bagaimana kaitan barisan yang konvergen pada topologi kuat dengan barisan yang konvergen pada topologi lemah. Syarat perlu dan cukup apa saja yang harus dipenuhi agar suatu barisan konvergen pada topologi lemah.

Selanjutnya, konsep kekonvergenan pada topologi kuat mendefinisikan himpunan yang kompak secara barisan (*sequentially compact set*), yaitu himpunan yang setiap barisannya memuat subhimpunan yang konvergen secara kuat. Lebih dari itu, apakah ada pendefinisian kekompakan secara barisan pada topologi lemah, dalam arti konsep kekonvergenan yang digunakan adalah kekonvergen lemah. Kemudian, apakah Teorema Bolzano-Weirstrass yang berlaku pada ruang bilangan real dalam konteks konvergen kuat juga berlaku pada sebarang ruang vektor bernorma dalam konteks kekonvergenan lemah. Oleh karena itu, penulis menyusun tugas akhir dengan judul "**Kekonvergenan Lemah Pada Ruang Vektor Bernorma**"

1.2 Rumusan dan Batasan Masalah

Inti kajian tugas akhir ini adalah mengkaji secara lebih dalam sifat-sifat dari kekonvergenan lemah, yang dimotifasi oleh sifat-sifat yang dibangun oleh kekonvergenan kuat.

Dalam karya tulis ini akan dibahas sifat-sifat apa saja yang yang berlaku pada kekonvergenan kuat yang juga berlaku pada kekonvergenan lemah, atau sifat apa saja yang dimiliki barisan yang konvergen lemah yang tidak dimilki oleh barisan yang konvergen kuat. Selain itu, pada tugas akhir ini juga diungkap hubungan antara barisan yang konvergen secara lemah dan konvergen secara kuat, apakah setiap barisan yang konvergen lemah juga konvergen kuat, atau sebaliknya. Tidak hanya sampai disitu, hal yang serupa diidentifikasikan pula pada kekompakan secara barisan dan secara lemah. Selain itu, akan diungkap pula keberlakuan Teorema Bolzano-Weirstrass dalam konteks kekonvergenan lemah.

Dengan demikian, secara khusus rumusan masalah yang dibahas pada karya tulis ini adalah:

a. Sifat-sifat apa saja dalam kekonvergenan kuat yang berlaku pada kekonvegenan lemah.
b. Bagaimana kaitan antara barisan yang konvergen secara lemah dengan barisan yang konvergen secara kuat.
c. Syarat cukup dan perlu apa saja yang harus dipenuhi agar suatu barisan konvergen secara lemah.
d. Sifat-sifat apa saja dalam kekompakan secara barisan dan secara kuat yang berlaku pada kekompakan secara barisan dan secara lemah.
e. Bagaimana kaitan antara himpunan yang kompak secara barisan dan secara lemah dan barisan yang kompak secara barisan dan secara kuat.
f. Bagaimana keberlakuan Teorema Bolzano-weirstrass dalam konteks kekonvergenan lemah.

Dalam karya tulis ini, pembahasan dibatasi hanya pada ruang vektor real.

1.3 Tujuan Penulisan

Mengacu pada permasalahan yang telah dirumuskan di Rumusan Masalah, tujuan penulisan karya tulis ini adalah:

a. Mengetahui sifat-sifat dalam kekonvergenan kuat yang berlaku pada kekonvergenan lemah.
b. Mengetahui kaitan antara barisan yang konvergen secara lemah dan barisan yang konvergen secara kuat.
c. Mengetahui syarat cukup dan perlu suatu barisan agar konvergen secara lemah.
d. Mengetahui sifat-sifat dalam kekompakan secara barisan dan secara kuat yang berlaku pada kekompakan secara barisan dan secara lemah.
e. Mengetahui kaitan antara himpunan yang kekompakan secara barisan dan secara lemah dan barisan yang kompak secara barisan dan secara kuat.
f. Mengetahui keberlakuan Teorema Bolzano-weirstrass dalam konteks kekonvergenan lemah.

1.4 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika pada penulisan karya tulis ini, yaitu:

1. BAB I (Pendahuluan), merupakan pengantar karya tulis ini. Pada bab ini dibahas tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan.

2. BAB II (Teori Pendukung), pada bab ini dimunculkan teori-teori yang mendukung dalam pembahasan kekonvergenan lemah dan kekompakan secara barisan dan secara lemah. Materi yang dibahas diantaranya, ruang vektor, ruang vektor bernorma, ruang metrik, topologi kuat (normaa), kekonvergenan kuat, ruang Banach, ruang Hilbert, ruang dual dan kekompakan secara barisan.
3. BAB III (Kekonvergenan Lemah dan Sifat-sifatnya), merupakan pokok bahasan awal karya tulis ini. Bab ini membahas mengenai definisi kekonvergenan lemah, sifat-sifat dasar dari konvergen lemah, kaitan antara kekonvergenan lemah dan kekonvergenan kuat, dan dibahas pula mengenai syarat perlu dan cukup agar suatu barisan pada suatu ruang vektor bernorma konvergen secara lemah.
4. BAB IV (Kekompakan Secara Barisan dan Secara Lemah), merupakan pokok bahasan kedua karya tulis ini. Dalam bab ini akan dibahas mengenai definisi dan keterbatasan himpunan yang kompak secara barisan dan secara lemah, keberlakuan Teorema Bolzano-Weirstrass, dan dibahas mengenai himpunan yang kompak secara barisan dan secara lemah.
5. BAB V (Kesimpulan dan Saran), menyajikan kesimpulan atas keseluruhan karya tulis ini, dan saran untuk penulisan berikutnya yang berkaitan dengan kekonvergenan lemah