BAB III

MODEL *STATE-SPACE*

3.1 Representasi Model *State-Space*

Representasi *state space* dari suatu sistem merupakan suatu konsep dasar dalam teori kontrol modern. Model *state space* dapat mengatasi keterbatasan dari teori kontrol konvensional dalam meramalkan perilaku dinamis dari suatu sistem yang kompleks. Analisa *state space* dapat diterapkan pada suatu sistem multi input-multi output, yang mungkin linear ataupun nonlinear, parameter konstan *(time-invariant)* ataupun parameter berubah.

State dari suatu sistem didefinisikan sebagai sekumpulan kecil informasi mengenai tingkah laku atau keadaan pada saat ini dan sebelumnya sedemikian sehingga keadaan yang akan datang dari suatu sistem dapat digambarkan secara lengkap sebagai pengetahuan bagi keadaan sekarang dan sebagai input bagi keadaan masa yang akan datang.

Jika Y_{1t} dan Y_{2t} sebagai output dari suatu sistem terhadap input X_{1t} dan X_{2t} maka suatu sistem dikatakan linear jika dan hanya jika suatu kombinasi linear dari input $aX_{1t} + bX_{2t}$, menghasilkan output dengan kombinasi linear yang sama $aY_{1t} + bY_{2t}$ untuk berbagai konstanta a dan b. Suatu sistem dikatakan *time-invariant* jika karakteristik dari suatu sistem tidak berubah terhadap waktu, sedemikian sehingga jika input X_t menghasilkan Y_t, maka input X_{t-to} akan menghasilkan Y_{t-to}. Sedangkan suatu sistem dikatakan linear *time-invariant* jika sistem itu linear dan juga *time-invariant.* Suatu sistem dikatakan akan mempunyai proses yang stasioner apabila sistem ini merupakan sistem yang linear *time-invariant.*

Untuk sistem yang linear *time-invariant*, bentuk *state space*-nya digambarkan dalam persamaan *state*:

$$Y_{t+1} = AY_t + GX_{t+1} \tag{3.1.1}$$

Dan persamaan output:

$$Z_t = HY_t \tag{3.1.2}$$

Di mana:

Y_t : vektor *state* dengan order k

A : matriks transisi $k \times k$

G : matriks input $k \times n$

X_t : vektor input pada sistem $n \times 1$

Z_t : vektor output $m \times 1$

H : matriks observasi atau output $m \times k$

Definisi:

Sebuah runtun waktu $\{Z_t\}$ dikatakan dalam representasi *state-space* jika di sana ada model *state-space* untuk $\{Z_t\}$ yang sesuai dengan persamaan (3.1.1) dan (3.1.2). (Brockwell and Davis, 2002)

Jika input X_t dan output Z_t adalah proses stokastik, maka pernyataan *state space*-nya menjadi:

$$Y_{t+1} = AY_t + Ga_{t+1}$$

$$Z_t = HY_t + b_t \tag{3.1.3}$$

Di mana $a_{t+1} = X_{t+1} - E(X_{t+1}|X_t, t \leq n)$ adalah vektor *error* peramalan satu langkah kedepan dari proses input X_t dan b_t adalah suatu vektor *error* berukuran $m \times 1$ yang diasumsikan independen terhadap a_t. Vektor a_{t+1} juga diketahui sebagai inovasi dari input X_t pada waktu (t+1). Ketika $Z_t = X_t$, b_t dihilangkan dari persamaan (3.1) dan bentuk *state space*-nya adalah bentuk yang berasal dari proses stokastik Z_t yang stasioner, yaitu:

$$Y_{t+1} = AY_t + Ga_{t+1}$$

$$Z_t = HY_t \qquad (3.1.4)$$

Jadi, proses Z_t tersebut adalah output dari suatu proses stokastik yang linear dengan parameter konstan yang dikendalikan oleh input *white noise* a_t. Suatu proses dikatakan proses stokastik jika variabel-variabel random tersebut dapat dinyatakan dalam sekelompok urutan waktu. Sedangkan suatu proses (a_t) disebut suatu proses *white noise* jika proses tersebut merupakan deretan dari variabel random tidak berkorelasi yang berasal dari distribusi tertentu dengan mean dan variansi yang diasumsikan 0 dan Σ_a, proses tersebut memiliki $\gamma_{ij}(k) = 0$ untuk $k = 0$, sedangkan Y_t sebagai *state* dari proses tersebut. Persamaan *state* juga disebut persamaan sistem atau persamaan transisi dan persamaan output juga disebut dengan persamaan pengukuran atau persamaan observasi.

3.2 Hubungan antara model *State-Space* dengan model AR, MA dan ARMA

3.2.1. Hubungan antara model *state-space* dengan model AR

Untuk melihat hubungan antara model *state space* dan model AR baik untuk kasus *univariate* maupun *multivariate*, berikut diberikan bentuk umum dari model AR(p) dari vektor berdimensi m yang stasioner dengan rata-rata nol.

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + \Phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \Phi_p Z_{t-p} + a_t \qquad (3.2.1.1)$$

Atau

$$\Phi(B) Z_t = a_t$$

Dengan menulis kembali (3.2.1.1) dalam bentuk *Moving Average* diperoleh:

$$Z_t = \Phi^{-1}(B) a_t$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j} \qquad (3.2.1.2)$$

Di mana $\psi_0 = I$, sehingga $Z_{t+i} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+i-j}$.

Diberikan $Z_{t+i|t} = E(Z_{t+i}|Z_k,\ k \leq t)$ maka $Z_{t+i|t} = \sum_{j=i}^{\infty} \psi_j a_{t+i-j}$.

Sekarang,

$$Z_{t+i|t+1} = E(Z_{t+i}|Z_k, k \leq t+1)$$

$$= \sum_{j=(i-1)}^{\infty} \psi_j a_{t+i-j}$$

$$= \sum_{j=i}^{\infty} \psi_j a_{t+i-j} + \psi_{i-1} a_{t+1}$$

$$= Z_{t+i|t} + \psi_{i-1} a_{t+1}$$

Dari sisni diperoleh:

$$Z_{t+1|t+1} = Z_{t+1|t} + a_{t+1}$$

$$Z_{t+2|t+1} = Z_{t+2|t} + \psi_1 a_{t+1}$$

$$Z_{t+3|t+1} = Z_{t+3|t} + \psi_2 a_{t+1}$$

$$\vdots$$

$$Z_{t+p|t+1} = Z_{t+p|t} + \psi_{p-1} a_{t+1}$$

$$= \Phi_p Z_{t|t} + \Phi_{p-1} Z_{t+1|t} + \cdots + \Phi_1 Z_{t+p-1|t} + \psi_{p-1} a_{t+1}$$

Dari (3.2.1.1) diperoleh:

$$Z_{t+p|t} = \Phi_1 Z_{t+p-1|t} + \Phi_2 Z_{t+p-2|t} + \cdots + \Phi_p Z_t$$

$$Z_{t+p+1|t} = \Phi_1 Z_{t+p|t} + \Phi_2 Z_{t+p-1|t} + \cdots + \Phi_p Z_{t+1|t}$$

$$= f\left(Z_t,\, Z_{t+1|t}, \ldots,\, Z_{t+p-1|t}\right)$$

Jelas terlihat bahwa $Z_{t+p+i|t}$ untuk $i \geq 0$ merupakan fungsi dari $Z_t,\, Z_{t+1|t}, \ldots,\, Z_{t+p-1|t}$. Sehingga vektor *state* adalah $\left(Z_t,\, Z_{t+1|t}, \ldots,\, Z_{t+p-1|t}\right)$ dan representasi *state space* dari model vektor AR(p) dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Z_{t+1|t+1} \\ Z_{t+2|t+1} \\ \vdots \\ Z_{t+p|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \Phi_p & \Phi_{p-1} & \Phi_{p-2} & \Phi_{p-3} & \cdots & \Phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \\ \vdots \\ Z_{t+p-1|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{p-1} \end{bmatrix} a_{t+1}$$

(3.2.1.3)

Dengan order untuk vektor *state* adalah sama dengan order untuk AR yaitu $k = p$

Dan,

$$Z_t = [I_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \\ \vdots \\ Z_{t+p-1|t} \end{bmatrix} \qquad (3.2.1.4)$$

Sebagai catatan dari representasi di atas, m komponen pertama dari vektor *state* adalah sama dengan Z_t.

3.2.1.1. Untuk runtun waktu *univariate*

proses *Autoregressive* tingkat(1), AR(1)

Bentuk umum dari proses AR(1) adalah:

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t \tag{3.2.1.5}$$

atau

$$(1 - \phi_1 B)Z_t = a_t$$

Dengan menulisnya dalam bentuk MA diperoleh:

$$Z_t = (1 - \phi_1 B)^{-1} a_t$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}$$

Di mana $\psi_0 = 1$, dengan mengacu pada (3.2.1.3) dan (3.2.1.4), dan order untuk vektor state adalah $k = p = 1$, maka representasi *state space* untuk model AR(1) adalah:

$$\left[Z_{t+1|t+1}\right] = [\phi][Z_t] + [1]a_{t+1} \tag{3.2.1.6}$$

Akan ditunjukan bahwa bentuk *state space* pada (3.2.1.6) adalah sama dengan model AR(1) pada (3.2.1.5). Dari (3.2.1.6) diperoleh bentuk:

$$Z_{t+1|t+1} = \phi Z_t + a_{t+1}$$

Karena $Z_{t+1|t+1} = Z_{t+1}$ maka,

$$Z_{t+1} = \phi Z_t + a_{t+1}$$

Atau dapat ditulis:

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$$

Proses *Autoregressive* tingkat(2), AR(2)

Bentuk umum dari proses AR(2) adalah:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t \qquad (3.2.1.7)$$

atau

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) Z_t = a_t$$

Dengan menulisnya dalam bentuk MA diperoleh:

$$Z_t = (1 - \phi_1 B + \phi_2 B^2)^{-1} a_t$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}$$

Di mana $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = \phi_1$ dengan mengacu pada (3.2.1.3) dan (3.2.1.4), dan order untuk vektor *state* adalah $k = p = 2$, maka representasi *state space* untuk model AR(2) adalah:

$$\begin{bmatrix} Z_{t+1|t+1} \\ Z_{t+2|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} a_{t+1} \qquad (3.2.1.8)$$

Akan ditunjukan bahwa bentuk *state space* pada (3.2.1.8) adalah sama dengan model AR(2) pada (3.2.1.7). Dari (3.2.1.8) diperoleh bentuk:

$$Z_{t+1|t+1} = Z_{t+1|t} + a_{t+1} \qquad (3.2.1.9)$$

$$Z_{t+2|t+1} = \phi_1 Z_{t+1|t} + \phi_2 Z_t + \psi_1 a_{t+1} \qquad (3.2.1.10)$$

Dari (3.2.1.9) diperoleh:

$$Z_{t+2|t+2} = Z_{t+2|t+1} + a_{t+2} \qquad (3.2.1.11)$$

karena $Z_{t+1|t+1} = Z_{t+1}$ dan $Z_{t+2|t+2} = Z_{t+2}$, dengan mensubstitusikan (3.2.1.9) pada (3.2.1.10) maka diperoleh:

$$Z_{t+2} = \phi_1(Z_{t+1} - a_{t+1}) + \phi_2 Z_t + \psi_1 a_{t+1}$$

Selanjutnya substitusi (3.2.1.10) pada (3.2.1.11) diperoleh:

$$\begin{aligned} Z_{t+2} &= \phi_1(Z_{t+1} - a_{t+1}) + \phi_2 Z_t + \psi_1 a_{t+1} + a_{t+2} \\ &= \phi_1 Z_{t+1} - \phi_1 a_{t+1} + \phi_2 Z_t + a_{t+2} + \psi_1 a_{t+1} \\ &= \phi_1 Z_{t+1} + \phi_2 Z_t + a_{t+2} + (\psi_1 - \phi_1) a_{t+1} \end{aligned}$$

$$Z_{t+2} = \phi_1 Z_{t+1} + \phi_2 Z_t + a_{t+2}$$

Atau dapat ditulis,

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$$

3.2.1.2. Untuk Runtun waktu *Bivariate*

proses Vektor *Autoregressive* tingkat(1), VAR (1)

Bentuk umum dari proses VAR(1) adalah

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + a_t$$

Atau,

$$Z_t = \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,t} \\ a_{2,t} \end{bmatrix} \quad (3.2.1.12)$$

dengan mengacu pada (3.2.1.3) dan (3.2.1.4), dan order untuk vektor *state* adalah $k = p = 1$, maka representasi *state space* untuk model VAR(1) adalah:

$$[Z_{t+1|t+1}] = [\Phi_1][Z_t] + [1]a_{t+1} \quad (3.2.1.13)$$

Di mana $\Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$, Berdasarkan hal tersebut, maka vektor *state* sama dengan $[Z_t']'$ jika semua komponen dari vektor tersebut bersifat linear independen dan sama dengan subset dari $[Z_t']'$ jika hanya beberapa komponen dari vektor tersebut yang bersifat linear independen. Catat bahwa $[Z_t']' = [Z_{1,t},\ Z_{2,t}]'$. Sekarang, dari (3.2.1.12) diperoleh bentuk:

$$Z_{1,t} = \phi_{11}Z_{1,t-1} + \phi_{12}Z_{2,t-1} + a_{1,t} \tag{3.2.1.14}$$

$$Z_{2,t} = \phi_{21}Z_{1,t-1} + \phi_{22}Z_{2,t-1} + a_{2,t} \tag{3.2.1.15}$$

Ternyata keduanya linear independen, sehingga vektor *state*-nya adalah $[Z_{1,t},\ Z_{2,t},]'$. Representasi pada (3.2.1.13) dapat diubah dengan merepresentasikan $Z_{1,\,t+1}$ dan $Z_{2,\,t+1}$ pada vektor *state* $[Z_{1,t},\ Z_{2,t}]'$ dengan input *noise* $a_{1,\,t+1}$ dan $a_{2,\,t+1}$. Dari (3.2.1.14) dan (3.2.1.15) diperoleh:

$$\begin{aligned} Z_{1,t+1} &= Z_{1,\,t+1|t+1} \\ &= Z_{1,\,t+1|t} + a_{1,t+1} \\ &= \phi_{11}Z_{1,t} + \phi_{12}Z_{2,t} + a_{1,t+1} \end{aligned} \tag{3.2.1.16}$$

$$\begin{aligned} Z_{2,t+1} &= Z_{2,\,t+1|t+1} \\ &= Z_{2,\,t+1|t} + a_{2,t+1} \\ &= \phi_{21}Z_{1,t} + \phi_{22}Z_{2,t} + a_{2,t+1} \end{aligned} \tag{3.2.1.17}$$

Kombinasikan (3.2.1.16) dan (3.2.1.17) maka diperoleh representasi *state space* untuk model VAR(1) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Z_{1,t+1} \\ Z_{2,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t+1} \\ a_{2,t+1} \end{bmatrix} \tag{3.2.1.18}$$

Akan ditunjukan bahwa bentuk *state space* pada (3.2.1.18) adalah sama dengan model VAR(1) pada (3.2.1.12). dari (3.2.1.18) diperoleh:

$$Z_{1,t+1} = \phi_{11}Z_{1,t} + \phi_{12}Z_{2,t} + a_{1,t+1}$$

$$Z_{2,t+1} = \phi_{21}Z_{1,t} + \phi_{22}Z_{2,t} + a_{2,t+1}$$

Atau bisa ditulis,

$$Z_{1,t} = \phi_{11} Z_{1,t-1} + \phi_{12} Z_{2,t-1} + a_{1,\,t}$$

$$Z_{2,t} = \phi_{21} Z_{1,t-1} + \phi_{22} Z_{2,t-1} + a_{2,\,t}$$

dari persamaan tersebut maka diperoleh model VAR(1) seperti pada (3.2.1.12).

proses Vektor *Autoregressive* tingkat(2), VAR (2)

Bentuk umum dari proses VAR(2) adalah:

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + \Phi_2 Z_{t-2} + a_t$$

Atau,

$$Z_t = \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1.11} & \phi_{1.12} \\ \phi_{1.21} & \phi_{1.22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{2.11} & \phi_{2.12} \\ \phi_{2.21} & \phi_{2.22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t-2} \\ Z_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,t} \\ a_{2,t} \end{bmatrix} \tag{3.2.1.19}$$

dengan mengacu pada (3.2.1.3) dan (3.2.1.4), dan order untuk vektor *state* adalah $k = 2$, maka representasi *state space* untuk model VAR(2) adalah:

$$\begin{bmatrix} Z_{t+1|t+1} \\ Z_{t+2|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Phi_2 & \Phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \Psi_1 \end{bmatrix} a_{t+1} \tag{3.2.1.20}$$

Di mana $\Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{1.11} & \phi_{1.12} \\ \phi_{1.21} & \phi_{1.22} \end{bmatrix}$ dan $\Phi_2 = \begin{bmatrix} \phi_{2.11} & \phi_{2.12} \\ \phi_{2.21} & \phi_{2.22} \end{bmatrix}$. Berdasarkan hal tersebut, maka vektor *state* sama dengan $\left[Z_t',\ Z_{t+1|t}'\right]'$ jika semua komponen dari vektor tersebut bersifat linear independen dan sama dengan subset dari $\left[Z_t',\ Z_{t+1|t}'\right]'$ jika hanya beberapa komponen dari vektor tersebut yang bersifat linear independen. Untuk menguji apakah vektor state yang mungkin dari $\left[Z_t',\ Z_{t+1|t}'\right]'$ bersifat linear independen atau tidak, perhatikan uraian berikut:

$$\left[Z_t', Z_{t+1|t}'\right]' = \left[Z_{1,t},\ Z_{2,t},\ Z_{1,t+1|t},\ Z_{2,t+1|t}\right]'$$

Dari (3.2.1.19) diperoleh bentuk:

$$Z_{1,t} = \phi_{1.11}Z_{1,t-1} + \phi_{1.12}Z_{2,t-1} + \phi_{2.11}Z_{1,t-2} + \phi_{2.12}Z_{2,t-2} + a_{1,t} \quad (3.2.1.21)$$

$$Z_{2,t} = \phi_{1.21}Z_{1,t-1} + \phi_{1.22}Z_{2,t-1} + \phi_{2.21}Z_{1,t-2} + \phi_{2.22}Z_{2,t-2} + a_{2,t} \quad (3.2.1.22)$$

maka,

$$Z_{1,\,t+1|t} = \phi_{1.11}Z_{1,t} + \phi_{1.12}Z_{2,t} + \phi_{2.11}Z_{1,t-1} + \phi_{2.12}Z_{2,t-1} \quad (3.2.1.23)$$

$$Z_{2,\,t+1|t} = \phi_{1.21}Z_{1,t} + \phi_{1.22}Z_{2,t} + \phi_{2.21}Z_{1,t-1} + \phi_{2.22}Z_{2,t-1} \quad (3.2.1.24)$$

Ternyata semua komponen dari vektor tersebut bersifat linear independen, sehingga vektor *state*-nya adalah $[Z_{1,t},\ Z_{2,t},\ Z_{1,t+1|t},\ Z_{2,t+1|t}]'$. Representasi pada (3.2.1.20) dapat diubah dengan merepresentasikan $Z_{1,\,t+1}$, $Z_{2,\,t+1}$, $Z_{1,\,t+2|t+1}$, dan $Z_{2,\,t+2|t+1}$ pada vektor *state* $[Z_{1,t},\ Z_{2,t},\ Z_{1,t+1|t},\ Z_{2,t+1|t}]'$ dengan input *noise* $a_{1,\,t+1}$ dan $a_{2,\,t+1}$. Dari (3.2.1.21) dan (3.2.1.22) diperoleh:

$$\begin{aligned} Z_{1,t+1} &= Z_{1,\,t+1|t+1} \\ &= Z_{1,\,t+1|t} + a_{1,t+1} \end{aligned} \quad (3.2.1.25)$$

$$\begin{aligned} Z_{2,t+1} &= Z_{2,\,t+1|t+1} \\ &= Z_{2,\,t+1|t} + a_{2,t+1} \end{aligned} \quad (3.2.1.26)$$

Dari (3.2.1.23) diperoleh:

$$\begin{aligned} Z_{1,\,t+2|t+1} &= \phi_{1.11}Z_{1,t+1} + \phi_{1.12}Z_{2,t+1} + \phi_{2.11}Z_{1,t} + \phi_{2.12}Z_{2,t} \\ &= \phi_{1.11}(Z_{1,\,t+1|t} + a_{1,\,t+1}) + \phi_{1.12}(Z_{2,\,t+1|t} + a_{2,\,t+1}) + \phi_{2.11}Z_{1,t} \\ &\quad + \phi_{2.12}Z_{2,t} \\ &= \phi_{1.11}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{1.11}a_{1,\,t+1} + \phi_{1.12}Z_{2,\,t+1|t} + \phi_{1.12}a_{2,\,t+1} \\ &\quad + \phi_{2.11}Z_{1,t} + \phi_{2.12}Z_{2,t} \end{aligned}$$

$$Z_{1,\,t+2|t+1} = \phi_{2.11}Z_{1,t} + \phi_{2.12}Z_{2,t} + \phi_{1.11}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{1.12}Z_{2,\,t+1|t} + \phi_{1.11}a_{1,\,t+1} + \phi_{1.12}a_{2,\,t+1} \tag{3.2.1.27}$$

Dari (3.2.1.24) diperoleh:

$$\begin{aligned} Z_{2,\,t+2|t+1} &= \phi_{1.21}Z_{1,t+1} + \phi_{1.22}Z_{2,t+1} + \phi_{2.21}Z_{1,t} + \phi_{2.22}Z_{2,t} \\ &= \phi_{1.21}\left(Z_{1,\,t+1|t} + a_{1,\,t+1}\right) + \phi_{1.22}\left(Z_{2,\,t+1|t} + a_{2,\,t+1}\right) + \phi_{2.21}Z_{1,t} \\ &\quad + \phi_{2.22}Z_{2,t} \\ &= \phi_{1.21}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{1.21}a_{1,\,t+1} + \phi_{1.22}Z_{2,\,t+1|t} + \phi_{1.22}a_{2,\,t+1} \\ &\quad + \phi_{2.21}Z_{1,t} + \phi_{2.22}Z_{2,t} \end{aligned}$$

$$Z_{2,\,t+2|t+1} = \phi_{2.21}Z_{1,t} + \phi_{2.22}Z_{2,t} + \phi_{1.21}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{1.22}Z_{2,\,t+1|t} + \phi_{1.21}a_{1,\,t+1} + \phi_{1.22}a_{2,\,t+1} \tag{3.2.1.28}$$

Kombinasikan (3.2.1.25), (3.2.1.26), (3.2.1.27) dan (3.2.1.28) maka diperoleh representasi *state space* untuk model VAR(2) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Z_{1,\,t+1} \\ Z_{2,\,t+1} \\ Z_{1,\,t+2|t+1} \\ Z_{2,\,t+2|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \phi_{2.11} & \phi_{2.12} & \phi_{1.11} & \phi_{1.12} \\ \phi_{2.21} & \phi_{2.22} & \phi_{1.21} & \phi_{1.22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \\ Z_{1,t+1|t} \\ Z_{2,t+1|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \phi_{1.11} & \phi_{1.12} \\ \phi_{1.21} & \phi_{1.22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,\,t+1} \\ a_{2,\,t+1} \end{bmatrix} \tag{3.2.1.29}$$

Akan ditunjukan bahwa bentuk *state space* pada (3.2.1.29) adalah sama dengan model VAR(2) pada (3.2.1.19). dari (3.2.1.25) diperoleh:

$$Z_{1,t+2} = Z_{1,\,t+2|t+1} + a_{1,t+2}$$

Selanjutnya substitusikan pada (3.2.1.27) diperoleh:

$$\left(Z_{1,t+2} - a_{1,t+2}\right) = \phi_{2.11}Z_{1,t} + \phi_{2.12}Z_{2,t} + \phi_{1.11}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{1.12}Z_{2,\,t+1|t} + \phi_{1.11}a_{1,\,t+1} + \phi_{1.12}a_{2,\,t+1}$$

Atau,

$$Z_{1,t+2} = \phi_{2.11}Z_{1,t} + \phi_{2.12}Z_{2,t} + \phi_{1.11}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{1.12}Z_{2,\,t+1|t} + \phi_{1.11}a_{1,\,t+1}$$

$$+\phi_{1.12}a_{2,\,t+1} + a_{1,\,t+2}$$

$$= \phi_{1.11}\left(Z_{1,\,t+1|t} + a_{1,\,t+1}\right) + \phi_{1.12}\left(Z_{2,\,t+1|t} + a_{2,\,t+1}\right) + \phi_{2.11}Z_{1,t}$$

$$+\phi_{2.12}Z_{2,t} + a_{1,\,t+2}$$

$$Z_{1,t+2} = \phi_{1.11}Z_{1,t+1} + \phi_{12}Z_{2,t+1} + \phi_{1.11}Z_{1,t} + \phi_{2.12}Z_{2,t} + a_{1,t+2}$$

Sehingga,

$$Z_{1,t} = \phi_{1.11}Z_{1,t-1} + \phi_{1.12}Z_{2,t-1} + \phi_{2.11}Z_{1,t-2} + \phi_{2.12}Z_{2,t-2} + a_{1,t} \quad (3.2.1.30)$$

Selanjutnya dari (3.2.1.26) diperoleh:

$$Z_{2,t+2} = Z_{2,\,t+2|t+1} + a_{2,\,t+2}$$

Selanjutnya substitusikan pada (3.2.1.28) diperoleh:

$$\left(Z_{2,t+2} - a_{2,\,t+2}\right) = \phi_{2.21}Z_{1,t} + \phi_{2.22}Z_{2,t} + \phi_{2.21}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{1.22}Z_{2,\,t+1|t}$$

$$+\phi_{1.21}a_{1,t+1} + \phi_{1.22}a_{2,t+1}$$

Atau,

$$Z_{2,t+2} = \phi_{2.21}Z_{1,t} + \phi_{2.22}Z_{2,t} + \phi_{1.21}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{1.22}Z_{2,\,t+1|t} + \phi_{1.21}a_{1,t+1}$$

$$+\phi_{1.22}a_{2,t+1} + a_{2,\,t+2}$$

$$= \phi_{1.21}\left(Z_{1,\,t+1|t} + a_{1,\,t+1}\right) + \phi_{1.22}\left(Z_{2,\,t+1|t} + a_{2,\,t+1}\right) + \phi_{2.21}Z_{1,t}$$

$$+\phi_{2.22}Z_{2,t} + a_{2,\,t+2}$$

$$Z_{2,t+2} = \phi_{1.21}Z_{1,t+1} + \phi_{1.22}Z_{2,t+1} + \phi_{2.21}Z_{1,t} + \phi_{2.22}Z_{2,t} + a_{2,t+2}$$

Sehingga,

$$Z_{2,t} = \phi_{1.21}Z_{1,t-1} + \phi_{1.22}Z_{2,t-1} + \phi_{2.21}Z_{1,t-2} + \phi_{2.22}Z_{2,t-2} + a_{2,t} \quad (3.2.1.31)$$

Dari (3.2.1.30) dan (3.2.1.31) maka diperoleh model VAR(2) seperti pada (3.2.1.19).

3.2.2. Hubungan antara model *state-space* dengan model MA

Untuk melihat hubungan antara model *state space* dan model MA baik untuk kasus *univariate* maupun *multivariate*, berikut diberikan bentuk umum dari model MA(q) dari vektor berdimensi m yang stasioner dengan rata-rata nol.

$$Z_t = a_t + \Theta_1 a_{t-1} + \Theta_2 a_{t-2} + \cdots + \Theta_q a_{t-q} \qquad (3.2.2.1)$$

Atau

$$Z_t = \left(I + \Theta_1 B + \Theta_2 B^2 + \cdots + \Theta_q B^q\right) a_t$$

$$Z_t = \Theta(B) a_t$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \Theta_j a_{t-j} \qquad (3.2.2.2)$$

Dengan $\Theta(B) = 1 + \Theta_1 B + \Theta_2 B^2 + \cdots + \Theta_q B^q$ dan a_t adalah proses variabel *multivariate white noise* berdimensi m dengan rata-rata nol.

Di mana $\Theta_0 = I$, sehingga $Z_{t+i} = \sum_{j=0}^{\infty} \Theta_j a_{t+i-j}$.

Diberikan $Z_{t+i|t} = E(Z_{t+i}|Z_k,\ k \leq t)$ maka $Z_{t+i|t} = \sum_{j=i}^{\infty} \Theta_j a_{t+i-j}$.

Sekarang,

$$Z_{t+i|t+1} = E(Z_{t+i}|Z_k, k \leq t+1)$$

$$= \sum_{j=(i-1)}^{\infty} \Theta_j a_{t+i-j}$$

$$= \sum_{j=i}^{\infty} \Theta_j a_{t+i-j} + \Theta_{i-1} a_{t+1}$$

$$= Z_{t+i|t} + \Theta_{i-1} a_{t+1}$$

Dari sisni diperoleh:

$$Z_{t+1|t+1} = Z_{t+1|t} + a_{t+1}$$

$$Z_{t+2|t+1} = Z_{t+2|t} + \Theta_1 a_{t+1}$$

$$Z_{t+3|t+1} = Z_{t+3|t} + \Theta_2 a_{t+1}$$

$$\vdots$$

$$Z_{t+q|t+1} = Z_{t+q|t} + \Theta_{q-1} a_{t+1}$$

Sehingga vektor *state* adalah $\left(Z_t, Z_{t+1|t}, \ldots, Z_{t+q-1|t}\right)$ dan representasi *state space* dari model vektor MA(q) dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Z_{t+1|t+1} \\ Z_{t+2|t+1} \\ \vdots \\ Z_{t+q|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \\ \vdots \\ Z_{t+q-1|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_{q-1} \end{bmatrix} a_{t+1} \qquad (3.2.2.3)$$

Dengan order untuk vektor *state* adalah $k = q + 1$

Dan

$$Z_t = \begin{bmatrix} I_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \\ \vdots \\ Z_{t+q-1|t} \end{bmatrix} \qquad (3.2.2.4)$$

Sebagai catatan dari representasi di atas, m komponen pertama dari vektor *state* adalah sama dengan Z_t.

3.2.2.1. Untuk runtun waktu *univariate* proses *Moving Average* tingkat(1), MA(1)

Bentuk umum dari proses MA(1) adalah

$$Z_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} \qquad (3.2.2.5)$$

atau

$$Z_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

$$Z_t = \sum_{j=0}^{1} \theta_j a_{t-j}$$

Di mana $\theta_0 = 1$, dengan mengacu pada (3.2.2.3) dan (3.2.2.4), dan order untuk vektor *state* adalah $k = 1 + 1 = 2$, maka representasi *state space* untuk model MA(1) adalah:

$$\begin{bmatrix} Z_{t+1|t+1} \\ Z_{t+2|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} a_{t+1} \quad (3.2.2.6)$$

Akan ditunjukan bahwa bentuk *state space* pada (3.2.2.6) adalah sama dengan model MA(1) pada (3.2.2.5). Dari (3.2.2.6) diperoleh bentuk:

$$Z_{t+1|t+1} = Z_{t+1|t} + a_{t+1} \quad (3.2.2.7)$$

$$Z_{t+2|t+1} = \theta_1 a_{t+1} \quad (3.2.2.8)$$

Dari (3.2.2.7) diperoleh:

$$Z_{t+2|t+2} = Z_{t+2|t+1} + a_{t+2}$$

$$Z_{t+2} = Z_{t+2|t+1} + a_{t+2} \quad (3.2.2.9)$$

Dengan mensubstitusikan (3.2.2.8) pada (3.2.2.9) diperoleh:

$$Z_{t+2} = \theta_1 a_{t+1} + a_{t+2}$$

$$= a_{t+2} + \theta_1 a_{t+1}$$

Atau dapat ditulis:

$$Z_t = a_t + \theta_1 a_{t-1}$$

Proses *Moving Average* tingkat(2), MA(2).

Bentuk umum dari proses MA(2) adalah:

$$Z_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} \quad (3.2.2.10)$$

atau

$$Z_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2)a_t$$

$$= \sum_{j=0}^{2} \theta_j a_{t-j}$$

Di mana $\theta_0 = 1$, dengan mengacu pada (3.2.2.3) dan (3.2.2.4), dan order untuk vektor *state* adalah $k = 2 + 1 = 3$, maka representasi *state space* untuk model MA(2) adalah:

$$\begin{bmatrix} Z_{t+1|t+1} \\ Z_{t+2|t+1} \\ Z_{t+3|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \\ Z_{t+2|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} a_{t+1} \quad (3.2.2.11)$$

Akan ditunjukan bahwa bentuk *state space* pada (3.2.2.11) adalah sama dengan model MA(2) pada (3.2.2.10). Dari (3.2.2.11) diperoleh bentuk:

$$Z_{t+1|t+1} = Z_{t+1|t} + a_{t+1} \quad (3.2.2.12)$$

$$Z_{t+2|t+1} = Z_{t+2|t} + \theta_1 a_{t+1} \quad (3.2.2.13)$$

$$Z_{t+3|t+1} = \theta_2 a_{t+1} \quad (3.2.2.14)$$

Dari (3.2.2.12) diperoleh:

$$Z_{t+3|t+3} = Z_{t+3|t+2} + a_{t+3} \quad (3.2.2.15)$$

Dari (3.2.2.13) diperoleh:

$$Z_{t+3|t+2} = Z_{t+3|t+1} + \theta_1 a_{t+2} \quad (3.2.2.16)$$

dengan mensubstitusikan (3.2.2.16) pada (3.2.2.15) diperoleh:

$$Z_{t+3} = Z_{t+3|t+1} + \theta_1 a_{t+2} + a_{t+3} \quad (3.2.2.17)$$

Selanjutnya substitusi (3.2.2.14) pada (3.2.2.17) maka diperoleh:

$$Z_{t+3} = \theta_2 a_{t+1} + \theta_1 a_{t+2} + a_{t+3}$$

$$Z_{t+3} = a_{t+3} + \theta_1 a_{t+2} + \theta_2 a_{t+1}$$

Atau dapat ditulis

$$Z_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2}$$

3.2.2.2. Untuk runtun waktu *Bivariate*

proses Vektor *Moving Average* tingkat(1), VMA (1)

Bentuk umum dari proses VMA(1) adalah

$$Z_t = a_t + \Theta_1 a_{t-1}$$

Atau,

$$Z_t = \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,t} \\ a_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t-1} \\ a_{2,t-1} \end{bmatrix} \tag{3.2.2.18}$$

dengan mengacu pada (3.2.2.3) dan (3.2.2.4), dan order untuk vektor *state* adalah $k = 1 + 1 = 2$, maka representasi *state spa*ce untuk model VMA(1) adalah:

$$\begin{bmatrix} Z_{t+1|t+1} \\ Z_{t+2|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \Theta_1 \end{bmatrix} a_{t+1} \tag{3.2.2.19}$$

Di mana $\Theta_1 = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix}$, Berdasarkan hal tersebut, maka vektor *state* sama dengan $[Z_t', Z_{t+1|t}]'$ jika semua komponen dari vektor tersebut bersifat linear independen dan sama dengan subset dari $[Z_t', Z_{t+1|t}]'$ jika hanya beberapa komponen dari vektor tersebut yang bersifat linear independen. Untuk menguji apakah vektor *state* yang mungkin dari $[Z_t', \ Z_{t+1|t}']'$ bersifat linear independen atau tidak, perhatikan uraian berikut:

$$[Z_t', Z_{t+1|t}']' = [Z_{1,t}, \ Z_{2,t}, \ Z_{1,t+1|t}, \ Z_{2,t+1|t}]'$$

Dari (3.2.2.18) diperoleh bentuk:

$$Z_{1,t} = a_{1,t} + \theta_{11} a_{1,t-1} + \theta_{12} a_{2,t-1} \tag{3.2.2.20}$$

$$Z_{2,t} = a_{2,t} + \theta_{21} a_{1,t-1} + \theta_{22} a_{2,t-1} \tag{3.2.2.21}$$

maka,

$$Z_{1,\, t+1|t} = \theta_{11} a_{1,t} + \theta_{12} a_{2,t} \tag{3.2.2.22}$$

$$Z_{2,\, t+1|t} = \theta_{21} a_{1,t} + \theta_{22} a_{2,t} \tag{3.2.2.23}$$

Ternyata semua komponen dari vektor tersebut bersifat linear independen, sehingga vektor *state*-nya adalah $\left[Z_{1,t},\ Z_{2,t}, Z_{1,t+1|t}, Z_{2,t+1|t}\right]'$. Representasi pada (3.2.2.19) dapat diubah dengan merepresentasikan $Z_{1,\, t+1}$, $Z_{2,\, t+1}$, $Z_{1,\, t+2|t+1}$ dan $Z_{2,\, t+2|t+1}$ pada vektor *state* $\left[Z_{1,t},\ Z_{2,t}, Z_{1,t+1|t}, Z_{2,t+1|t}\right]'$ dengan input *noise* $a_{1,\, t+1}$ dan $a_{2,\, t+1}$. Dari (3.2.2.20) dan (3.2.2.21) diperoleh bentuk:

$$\begin{aligned} Z_{1,t+1} &= Z_{1,\, t+1|t+1} \\ &= Z_{1,\, t+1|t} + a_{1,t+1} \end{aligned} \tag{3.2.2.24}$$

$$\begin{aligned} Z_{2,t+1} &= Z_{2,\, t+1|t+1} \\ &= Z_{2,\, t+1|t} + a_{2,t+1} \end{aligned} \tag{3.2.2.25}$$

Dari (3.2.2.22) diperoleh:

$$Z_{1,\, t+2|t+1} = \theta_{11} a_{1,t+1} + \theta_{12} a_{2,t+1} \tag{3.2.2.26}$$

Dari (3.2.2.23) diperoleh:

$$Z_{2,\, t+2|t+1} = \theta_{21} a_{1,t+1} + \theta_{22} a_{2,t+1} \tag{3.2.2.27}$$

Kombinasikan (3.2.2.24), (3.2.2.25), (3.2.2.26) dan (3.2.2.27) maka diperoleh representasi *state space* untuk model VMA(1) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Z_{1,t+1} \\ Z_{2,t+1} \\ Z_{1,\, t+2|t+1} \\ Z_{2,\, t+2|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \\ Z_{1,t+1|t} \\ Z_{2,t+1|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,\, t+1} \\ a_{2,\, t+1} \end{bmatrix} \tag{3.2.2.28}$$

Akan ditunjukan bahwa bentuk *state space* pada (3.2.2.28) adalah sama dengan model VMA(1) pada (3.2.2.18). dari (3.2.2.24) diperoleh:

$$Z_{1,t+2} = Z_{1,\,t+2|t+1} + a_{1,t+2}$$

Selanjutnya substitusikan pada (3.2.2.26) diperoleh:

$$\left(Z_{1,t+2} - a_{1,\,t+2}\right) = \theta_{11} a_{1,t+1} + \theta_{12} a_{2,t+1}$$

$$Z_{1,t+2} = a_{1,t+2} + \theta_{11} a_{1,t+1} + \theta_{12} a_{2,t+1}$$

Sehingga,

$$Z_{1,t} = a_{1,\,t} + \theta_{11} a_{1,t-1} + \theta_{12} a_{2,t-1} \qquad (3.2.2.29)$$

dari (3.2.2.25) diperoleh:

$$Z_{2,t+2} = Z_{2,\,t+2|t+1} + a_{2,\,t+2}$$

Selanjutnya substitusikan pada (3.2.2.27) diperoleh:

$$\left(Z_{2,t+2} - a_{2,\,t+2}\right) = \theta_{21} a_{1,t+1} + \theta_{22} a_{2,t+1}$$

$$Z_{2,t+2} = a_{2,t+2} + \theta_{21} a_{1,t+1} + \theta_{22} a_{2,t+1}$$

Sehingga,

$$Z_{2,t} = a_{2,t} + \theta_{21} a_{1,t-1} + \theta_{22} a_{2,t-1} \qquad (3.2.2.30)$$

Dari (3.2.2.29) dan (3.2.2.30) maka diperoleh model VMA(1) seperti pada (3.2.2.18).

3.2.3. Hubungan model *state-space* dengan model ARMA

Untuk melihat hubungan antara model *state space* dan model ARMA baik untuk kasus *univariate* maupun *multivariate,* berikut diberikan model ARMA(p,q) dari vektor berdimensi m yang stasioner dengan rata-rata nol.

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + \cdots + \Phi_p Z_{t-p} + a_t + \Theta_1 a_{t-1} + \cdots + \Theta_q a_{t-q} \qquad (3.2.3.1)$$

atau

$$\Phi(B)Z_t = \Theta(B)a_t$$

Di mana $\Phi(B) = \left(I - \Phi_1 B - \cdots - \Phi_p B^p\right)$, $\Theta(B) = I + \Theta_1 B + \cdots + \Theta_q B^q$ dan a_t adalah proses variabel *multivariate white noise* berdimensi m dengan rata-rata nol.

Dengan menulis kembali (3.2.3.1) dalam bentuk MA:

$$Z_t = \Phi^{-1}(B)\Theta(B)a_t$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j a_{t-j} \quad (3.2.3.2)$$

Di mana $\psi_0 = I$, sehingga $Z_{t+i} = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j a_{t+i-j}$.

Diberikan $Z_{t+i|t} = E(Z_{t+i}|Z_k,\ k \leq t)$ maka $Z_{t+i|t} = \sum_{j=i}^{\infty} \Psi_j a_{t+i-j}$.

Sekarang

$$Z_{t+i|t+1} = E(Z_{t+i}|Z_k, k \leq t+1)$$

$$= \sum_{j=(i-1)}^{\infty} \Psi_j a_{t+i-j}$$

$$= \sum_{j=i}^{\infty} \Psi_j a_{t+i-j} + \Psi_{i-1} a_{t+1}$$

$$= Z_{t+i|t} + \Psi_{i-1} a_{t+1}$$

Dari sisni diperoleh:

$$Z_{t+1|t+1} = Z_{t+1|t} + a_{t+1}$$

$$Z_{t+2|t+1} = Z_{t+2|t} + \Psi_1 a_{t+1}$$

$$Z_{t+3|t+1} = Z_{t+3|t} + \Psi_2 a_{t+1}$$

$$\vdots$$

$$Z_{t+p|t+1} = Z_{t+p|t} + \psi_{p-1} a_{t+1}$$

$$= \Phi_p Z_{t|t} + \Phi_{p-1} Z_{t+1|t} + \cdots + \Phi_1 Z_{t+p-1|t} + \psi_{p-1} a_{t+1}$$

Diasumsikan, tanpa kehilangan generalitasnya, untuk $p > q$ perlu penambahan $\Phi_i = 0$. Dari (3.2.3.1) diperoleh:

$$Z_{t+p|t} = \Phi_1 Z_{t+p-1|t} + \Phi_2 Z_{t+p-2|t} + \cdots + \Phi_p Z_t$$

$$Z_{t+p+1|t} = \Phi_1 Z_{t+p|t} + \Phi_2 Z_{t+p-1|t} + \cdots + \Phi_p Z_{t+1|t}$$

$$= f\left(Z_t, Z_{t+1|t}, \dots, Z_{t+p-1|t}\right)$$

Jelas terlihat bahwa $Z_{t+p+i|t}$ untuk $i \geq 0$ merupakan fungsi dari $Z_t, Z_{t+1|t}, \dots, Z_{t+p-1|t}$. Sehingga vektor *state* adalah $\left(Z_t, Z_{t+1|t}, \dots, Z_{t+p-1|t}\right)$ dan representasi *state space* dari model vektor ARMA(p,q) dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Z_{t+1|t+1} \\ Z_{t+2|t+1} \\ \vdots \\ Z_{t+p|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \Phi_p & \Phi_{p-1} & \Phi_{p-2} & \Phi_{p-3} & \cdots & \Phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \\ \vdots \\ Z_{t+p-1|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{p-1} \end{bmatrix} a_{t+1}$$

(3.2.3.3)

Dengan order untuk vektor *state* adalah $k = max(p,\ q+1)$

Dan,

$$Z_t = [I_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \\ \vdots \\ Z_{t+p-1|t} \end{bmatrix} \qquad (3.2.3.4)$$

Sebagai catatan dari representasi dari di atas, m komponen pertama dari vektor *state* adalah sama dengan Z_t.

Sekarang akan ditunjukan bahwa model *state-space* dapat direpresentasikan kedalam bentuk ARMA. Andaikan proses Z memiliki representasi:

$$Y_{t+1} = AY_t + Ga_{t+1}$$

$$Z_t = HY_t \qquad (3.2.3.5)$$

Diasumsikan Y_t adalah vektor *state* berukuran p × 1 dan a_t inovasi (residual) dari Z_t. Jika polinomial karakteristik dari A memenuhi $|\lambda I - A| = \sum_{i=0}^{p} \phi_i \lambda^{p-1}$ Di mana $\phi_0 = 1$, dengan teorema Cayley-Hamilton (Wei, 2006: 466) diperoleh:

$$\sum_{i=0}^{p} \phi_i \lambda^{p-1} = 0 \qquad (3.2.3.6)$$

Dengan substitusi suksesif dalam (3.2.3.5) maka

$$\begin{aligned} Y_{t+i} &= AY_{t+i-1} + Ga_{t+i} \\ &= A(AY_{t+i-2} + Ga_{t+i-1}) + Ga_{t+i} \\ &= A^2Y_{t+i-2} + AGa_{t+i-1} + Ga_{t+i} \\ &\quad\vdots \\ &= A^iY_t + A^{i-1}Ga_{t+1} + \cdots + Ga_{t+p} \end{aligned}$$

Sekarang,

$$\begin{aligned} Z_{t+p} &= HY_{t+p} \\ &= H\left(A^pY_t + A^{p-1}Ga_{t+1} + \cdots + Ga_{t+p}\right) \\ \phi_1 Z_{t+p-1} &= H\phi_1 Y_{t+p-1} \\ &= H\phi_1\left(A^{p-1}Y_t + A^{p-2}Ga_{t+1} + \cdots + Ga_{t+p-1}\right) \\ &\quad\vdots \\ \phi_{p-1} Z_{t+1} &= H\phi_{p-1} Y_{t+1} \end{aligned}$$

$$= H\phi_{p-1}(AY_t + Ga_{t+1})$$

$$\phi_p Z_t \qquad = H\phi_p Y_t$$

Di sini Z_t memiliki representasi ARMA yakni

$$Z_{t+p} + \phi_1 Z_{t+p-1} + \cdots + \phi_{p-1} Z_{t+1} + \phi_p Z_t$$

$$= H\left(A^p + \phi_1 A^{p-1} + \cdots + \phi_{p-1} A + \phi_p + I\right)Y_t$$

$$+ H\left(A^{p-1} + \phi_1 A^{p-2} + \cdots + \phi_{p-1} I\right)Ga_{t+1} + \cdots + HGa_{t+p}$$

$$= \Theta_0 a_{t+p} + \cdots + \Theta_1 a_{t+p-1} + \Theta_{p-1} a_{t+1} \qquad (3.2.3.7)$$

Di mana $H\left(A^p + \phi_1 A^{p-1} + \cdots + \phi_{p-1} A + \phi_p + I\right)Y_t = 0$ dengan melihat kembali (3.2.3.6) dan $\Theta_i = H\left(A^i + \phi_i A^{i-1} + \cdots + \phi_i I\right)G$.

Untuk mendapatkan model ARMA dari representasi *state space*, karena komponen m pertama dari vektor *state* adalah sama terhadap Z_t . maka dapat dituangkan kembali representasi *state* tersebut kedalam ARMA dengan secara langsung menyelesaikan sistem *state space* dari persamaan tersebut untuk komponen-komponen m pertama.

3.2.3.1. Untuk runtun waktu *univariate*

proses *Autoregressive Moving Average* tingkat(1,1), ARMA(1,1)

Bentuk umum dari proses ARMA(1,1) adalah

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t + \theta_1 a_{t-1} \qquad (3.2.3.8)$$

atau

$$(1 - \phi_1 B)Z_t = (1 + \theta_1 B)a_t$$

Dengan menulisnya dalam bentuk MA diperoleh:

$$Z_t = (1 - \phi_1 B)^{-1}(1 + \theta_1 B)a_t$$

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}$$

Di mana $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = \phi_1 + \theta_1$ dan $\phi_i = 0$ untuk $i > 1$ dengan mengacu pada (3.2.3.3) dan (3.2.3.4), dan order untuk vektor state adalah $k = max(1{,}1 + 1) = 2$. maka representasi *state space* untuk model ARMA(1,1) adalah:

$$\begin{bmatrix} Z_{t+1|t+1} \\ Z_{t+2|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} a_{t+1} \quad (3.2.3.9)$$

Akan ditunjukan bahwa bentuk *state space* pada (3.2.3.9) adalah sama dengan model ARMA (1,1) pada (3.2.3.8). Dari (3.2.3.9) diperoleh bentuk:

$$Z_{t+1|t+1} = Z_{t+1|t} + a_{t+1} \quad (3.2.3.10)$$

$$Z_{t+2|t+1} = \phi_1 Z_{t+1|t} + \phi_2 Z_t + \psi_1 a_{t+1} \quad (3.2.3.11)$$

$$Z_{t+2|t+1} = \phi_1 Z_{t+1|t} + \psi_1 a_{t+1}$$

Dari (3.2.3.10) diperoleh:

$$Z_{t+2|t+2} = Z_{t+2|t+1} + a_{t+2} \quad (3.2.3.12)$$

karena $Z_{t+1|t+1} = Z_{t+1}$ dan $Z_{t+2|t+2} = Z_{t+2}$, dengan mensubstitusikan (3.2.3.10) pada (3.2.3.11) maka diperoleh:

$$Z_{t+2|t+1} = \phi_1 (Z_{t+1} - a_{t+1}) + \psi_1 a_{t+1}$$

Selanjutnya substitusi pada (3.2.3.12) diperoleh:

$$\begin{aligned} Z_{t+2} &= \phi_1 (Z_{t+1} - a_{t+1}) + \psi_1 a_{t+1} + a_{t+2} \\ &= \phi_1 Z_{t+1} - \phi_1 a_{t+1} + a_{t+2} + \psi_1 a_{t+1} \\ &= \phi_1 Z_{t+1} + a_{t+2} + (\psi_1 - \phi_1) a_{t+1} \end{aligned}$$

$$Z_{t+2} = \phi_1 Z_{t+1} + a_{t+2} + \theta_1 a_{t+1}$$

Atau dapat ditulis,

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t + \theta a_{t-1}$$

proses *Autoregressive Moving Average* tingkat(2,2), ARMA(2,2)

Bentuk umum dari proses ARMA(2,2) adalah

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-1} \qquad (3.2.3.13)$$

atau

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) Z_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2) a_t$$

Dengan menulisnya dalam bentuk MA diperoleh:

$$Z_t = (1 - \phi_1 B + \phi_2 B^2)^{-1} (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2) a_t$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}$$

Di mana $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = \phi_1 + \theta_1$, $\psi_2 = \phi_2 + \theta_2 + \phi_1^2 + \phi_1 \theta_1$ dan $\phi_i = 0$ untuk $i > 2$. Dengan mengacu pada (3.2.3.3) dan (3.2.3.4), dan order untuk vektor *state* adalah $k = max(2, 2+1) = 3$. Maka representasi *state space* untuk model ARMA(2,2) adalah:

$$\begin{bmatrix} Z_{t+1|t+1} \\ Z_{t+2|t+1} \\ Z_{t+3|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \phi_3 & \phi_2 & \phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \\ Z_{t+2|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} a_{t+1} \qquad (3.2.3.14)$$

Akan ditunjukan bahwa bentuk *state space* pada (3.2.3.14) adalah sama dengan model ARMA (2,2) pada (3.2.3.13). Dari (3.2.3.14) diperoleh bentuk:

$$Z_{t+1|t+1} = Z_{t+1|t} + a_{t+1} \qquad (3.2.3.15)$$

$$Z_{t+2|t+1} = Z_{t+2|t} + \psi_1 a_{t+1} \qquad (3.2.3.16)$$

$$Z_{t+3|t+1} = \phi_3 Z_t + \phi_2 Z_{t+1|t} + \phi_1 Z_{t+2|t} + \psi_2 a_{t+1} \qquad (3.2.3.17)$$

Dari (3.2.3.15) diperoleh:

$$Z_{t+2|t+2} = Z_{t+2|t+1} + a_{t+2} \tag{3.2.3.18}$$

$$Z_{t+3|t+3} = Z_{t+3|t+2} + a_{t+3} \tag{3.2.3.19}$$

Dari (3.2.3.16) diperoleh:

$$Z_{t+3|t+2} = Z_{t+3|t+1} + \psi_1 a_{t+2} \tag{3.2.3.20}$$

karena $Z_{t+1|t+1} = Z_{t+1}$, $Z_{t+2|t+2} = Z_{t+2}$ dan $Z_{t+3|t+3} = Z_{t+3}$, dengan mensubstitusikan (3.2.3.20) pada (3.2.3.19) maka diperoleh:

$$Z_{t+3} = Z_{t+3|t+1} + \psi_1 a_{t+2} + a_{t+3} \tag{3.2.3.21}$$

Selanjutnya substitusi (3.2.3.17) pada (3.2.3.21) diperoleh:

$$\begin{aligned}
Z_{t+3} &= \phi_3 Z_t + \phi_2 Z_{t+1|t} + \phi_1 Z_{t+2|t} + \psi_2 a_{t+1} + \psi_1 a_{t+2} + a_{t+3} \\
&= \phi_2 (Z_{t+1} - a_{t+1}) + \phi_1 \left(Z_{t+2|t+1} - \psi_1 a_{t+1}\right) + \psi_2 a_{t+1} + \psi_1 a_{t+2} \\
&\quad + a_{t+3} \\
&= \phi_2 Z_{t+1} - \phi_2 a_{t+1} + \phi_1 (Z_{t+2} - a_{t+2} - \psi_1 a_{t+1}) + \psi_2 a_{t+1} + \psi_1 a_{t+2} \\
&\quad + a_{t+3} \\
&= \phi_2 Z_{t+1} - \phi_2 a_{t+1} + \phi_1 Z_{t+2} - \phi_1 a_{t+2} - \phi_1 \psi_1 a_{t+1} + \psi_2 a_{t+1} \\
&\quad + \psi_1 a_{t+2} + a_{t+3} \\
&= \phi_1 Z_{t+2} + \phi_2 Z_{t+1} + a_{t+3} + (\psi_1 - \phi_1) a_{t+2} \\
&\quad + (\psi_2 - \phi_2 - \phi_1 \psi_1) a_{t+1} \\
&= \phi_1 Z_{t+2} + \phi_2 Z_{t+1} + a_{t+3} + (\psi_1 - \phi_1) a_{t+2} \\
&\quad + (\psi_2 - \phi_2 - \phi_1^2 - \phi_1 \theta_1) a_{t+1}
\end{aligned}$$

$$Z_{t+3} = \phi_1 Z_{t+2} + \phi_2 Z_{t+1} + a_{t+3} + \theta_1 a_{t+2} + \theta_2 a_{t+1}$$

Atau dapat ditulis,

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2}$$

3.2.3.2. Untuk runtun waktu *Bivariate*

proses Vektor *Autoregressive Moving Average* tingkat(1,1), VARMA(1,1)

Bentuk umum dari proses VARMA(1,1) adalah

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + a_t + \Theta_1 a_{t-1}$$

Atau,

$$Z_t = \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,t} \\ a_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t-1} \\ a_{2,t-1} \end{bmatrix} \quad (3.2.3.22)$$

dengan mengacu pada (3.2.3.3) dan (3.2.3.4), dan order untuk vektor *state* adalah $k = \max(1, 1+1) = 2$, maka representasi *state space* untuk model VARMA(1,1) adalah:

$$\begin{bmatrix} Z_{t+1|t+1} \\ Z_{t+2|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Phi_2 & \Phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \Psi_1 \end{bmatrix} a_{t+1} \quad (3.2.3.23)$$

Di mana $\Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$ dan $\Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks nol. Berdasarkan hal tersebut, maka vektor *state* sama dengan $\left[Z_t', \ Z_{t+1|t}'\right]'$ jika semua komponen dari vektor tersebut bersifat linear independen dan sama dengan subset dari $\left[Z_t', \ Z_{t+1|t}'\right]'$ jika hanya beberapa komponen dari vektor tersebut yang bersifat linear independen. Untuk menguji apakah vektor *state* yang mungkin dari $\left[Z_t', \ Z_{t+1|t}'\right]'$ bersifat linear independen atau tidak, perhatikan uraian berikut:

$$\left[Z_t', Z_{t+1|t}'\right]' = \left[Z_{1,t}, \ Z_{2,t}, \ Z_{1,t+1|t}, \ Z_{2,t+1|t}\right]'$$

Dari (3.2.3.22) diperoleh bentuk:

$$Z_{1,t} = \phi_{11} Z_{1,t-1} + \phi_{12} Z_{2,t-1} + a_{1,t} + \theta_{11} a_{1,t-1} + \theta_{12} a_{2,t-1} \quad (3.2.3.24)$$

$$Z_{2,t} = \phi_{21} Z_{1,t-1} + \phi_{22} Z_{2,t-1} + a_{2,t} + \theta_{21} a_{1,t-1} + \theta_{22} a_{2,t-1} \quad (3.2.3.25)$$

maka,

$$Z_{1,\,t+1|t} = \phi_{11}Z_{1,t} + \phi_{12}Z_{2,t} + \theta_{11}a_{1,t} + \theta_{12}a_{2,t} \tag{3.2.3.26}$$

$$Z_{2,\,t+1|t} = \phi_{21}Z_{1,t} + \phi_{22}Z_{2,t} + \theta_{21}a_{1,t} + \theta_{22}a_{2,t} \tag{3.2.3.27}$$

Ternyata semua komponen dari vektor tersebut bersifat linear independen, sehingga vektor *state*-nya adalah $\left[Z_{1,t},\ Z_{2,t},\ Z_{1,t+1|t},\ Z_{2,t+1|t}\right]'$. Representasi pada (3.2.3.23) dapat diubah dengan merepresentasikan $Z_{1,t+1}$, $Z_{2,t+1}$ $Z_{1,\,t+2|t+1}$, dan $Z_{2,\,t+2|t+1}$ pada vektor *state* $\left[Z_{1,t},\ Z_{2,t},\ Z_{1,t+1|t},\ Z_{2,t+1|t}\right]'$ dengan input *noise* $a_{1,t+1}$ dan $a_{2,t+1}$. Dari (3.2.3.24) dan (3.2.3.25) diperoleh bentuk:

$$\begin{aligned} Z_{1,t+1} &= Z_{1,\,t+1|t+1} \\ &= Z_{1,\,t+1|t} + a_{1,t+1} \end{aligned} \tag{3.2.3.28}$$

$$\begin{aligned} Z_{2,t+1} &= Z_{2,\,t+1|t+1} \\ &= Z_{2,\,t+1|t} + a_{2,t+1} \end{aligned} \tag{3.2.3.29}$$

Dari (3.2.3.26) diperoleh:

$$\begin{aligned} Z_{1,\,t+2|t+1} &= \phi_{11}Z_{1,t+1} + \phi_{12}Z_{2,t+1} + \theta_{11}a_{1,t+1} + \theta_{12}a_{2,t+1} \\ &= \phi_{11}\left(Z_{1,\,t+1|t} + a_{1,t+1}\right) + \phi_{12}\left(Z_{2,\,t+1|t} + a_{2,t+1}\right) + \theta_{11}a_{1,t+1} \\ &\quad +\theta_{12}a_{2,t+1} \\ &= \phi_{11}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{11}a_{1,t+1} + \phi_{12}Z_{2,\,t+1|t} + \phi_{12}a_{2,t+1} + \theta_{11}a_{1,t+1} \\ &\quad +\theta_{12}a_{2,t+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{1,\,t+2|t+1} &= \phi_{11}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{12}Z_{2,\,t+1|t} + (\phi_{11} + \theta_{11})a_{1,t+1} \\ &\quad +(\phi_{12} + \theta_{12})a_{2,t+1} \end{aligned} \tag{3.2.3.30}$$

Dari (3.2.3.27) diperoleh:

$$Z_{2,\,t+2|t+1} = \phi_{21}Z_{1,t+1} + \phi_{22}Z_{2,t+1} + \theta_{21}a_{1,t+1} + \theta_{22}a_{2,t+1}$$

$$Z_{2,\,t+2|t+1} = \phi_{21}\left(Z_{1,\,t+1|t} + a_{1,t+1}\right) + \phi_{22}\left(Z_{2,\,t+1|t} + a_{2,t+1}\right) + \theta_{21}a_{1,t+1}$$

$$+\theta_{22}a_{2,t+1}$$

$$= \phi_{21}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{21}a_{1,t+1} + \phi_{22}Z_{2,\,t+1|t} + \phi_{22}a_{2,t+1}$$

$$+\theta_{21}a_{1,t+1} + \theta_{22}a_{2,t+1}$$

$$Z_{2,\,t+2|t+1} = \phi_{21}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{22}Z_{2,\,t+1|t} + (\phi_{21} + \theta_{21})a_{1,t+1}$$

$$+(\phi_{21} + \theta_{22})a_{2,t+1} \qquad (3.2.3.31)$$

Kombinasikan (3.2.3.28), (3.2.3.29), (3.2.3.30) dan (3.2.3.31) maka diperoleh representasi *state space* untuk model VARMA(1,1) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Z_{1,\,t+1} \\ Z_{2,\,t+1} \\ Z_{1,\,t+2|t+1} \\ Z_{2,\,t+2|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & 0 & \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \\ Z_{1,t+1|t} \\ Z_{2,t+1|t} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ (\phi_{11} + \theta_{11}) & (\phi_{12} + \theta_{12}) \\ (\phi_{21} + \theta_{21}) & (\phi_{21} + \theta_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,\,t+1} \\ a_{2,\,t+1} \end{bmatrix} \qquad (3.2.3.32)$$

Akan ditunjukan bahwa bentuk *state space* pada (3.2.3.32) adalah sama dengan model VARMA(1,1) pada (3.2.3.22). dari (3.2.3.28) diperoleh:

$$Z_{1,t+2} = Z_{1,\,t+2|t+1} + a_{1,t+2}$$

Selanjutnya substitusikan pada (3.2.3.30) diperoleh:

$$\left(Z_{1,t+2} - a_{1,t+2}\right) = \phi_{11}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{12}Z_{2,\,t+1|t} + (\phi_{11} + \theta_{11})a_{1,t+1}$$

$$+(\phi_{12} + \theta_{12})a_{2,t+1}$$

Atau,

$$Z_{1,t+2} = \phi_{11}Z_{1,\,t+1|t} + \phi_{12}Z_{2,\,t+1|t} + (\phi_{11} + \theta_{11})a_{1,t+1}$$

$$+(\phi_{12} + \theta_{12})a_{2,\,t+1} + a_{1,t+2}$$

$$= \phi_{11} Z_{1,\, t+1|t} + \phi_{12} Z_{2,\, t+1|t} + \phi_{11} a_{1,\, t+1} + \theta_{11} a_{1,\, t+1} + \phi_{12} a_{2,\, t+1}$$

$$+ \theta_{12} a_{2,t+1} + a_{1,t+2}$$

$$= \phi_{11}\left(Z_{1,\, t+1|t} + a_{1,t+1}\right) + \phi_{12}\left(Z_{2,\, t+1|t} + a_{2,t+1}\right) + \theta_{11} a_{1,t+1}$$

$$+\theta_{12} a_{2,t+1} + a_{1,t+2}$$

$$Z_{1,\, t+2} = \phi_{11} Z_{1,\, t+1} + \phi_{12} Z_{2,\, t+1} + \theta_{11} a_{1,\, t+1} + \theta_{12} a_{2,\, t+1} + a_{1,\, t+2}$$

Sehingga,

$$Z_{1,t} = \phi_{11} Z_{1,t-1} + \phi_{12} Z_{2,t-1} + a_{1,t} + \theta_{11} a_{1,t-1} + \theta_{12} a_{2,t-1} \qquad (3.2.3.33)$$

dari (3.2.3.29) diperoleh:

$$Z_{2,t+2} = Z_{2,\, t+2|t+1} + a_{2,t+2}$$

Selanjutnya substitusikan pada (3.2.3.31) diperoleh:

$$\left(Z_{2,t+2} - a_{2,t+2}\right) = \phi_{21} Z_{1,\, t+1|t} + \phi_{22} Z_{2,\, t+1|t} + (\phi_{21} + \theta_{21}) a_{1,t+1}$$

$$+(\phi_{21} + \theta_{22}) a_{2,t+1}$$

Atau,

$$Z_{2,t+2} = \phi_{21} Z_{1,\, t+1|t} + \phi_{22} Z_{2,\, t+1|t} + (\phi_{21} + \theta_{21}) a_{1,t+1}$$

$$+(\phi_{21} + \theta_{22}) a_{2,t+1} + a_{2,t+2}$$

$$= \phi_{21} Z_{1,\, t+1|t} + \phi_{22} Z_{2,\, t+1|t} + \phi_{21} a_{1,t+1} + \theta_{21} a_{1,t+1} + \phi_{21} a_{2,t+1}$$

$$+\theta_{22} a_{2,t+1} + a_{2,t+2}$$

$$= \phi_{21}\left(Z_{1,\, t+1|t} + a_{2,t+1}\right) + \phi_{22}\left(Z_{2,\, t+1|t} + a_{2,t+1}\right) + \theta_{11} a_{1,t+1}$$

$$+\theta_{12} a_{2,t+1} + a_{2,t+2}$$

$$Z_{2,t+2} = \phi_{21} Z_{1,t+1} + \phi_{22} Z_{2,t+1} + a_{2,t+2} + \theta_{21} a_{1,t+1} + \theta_{22} a_{2,t+1}$$

Sehingga,

$$Z_{2,t} = \phi_{21} Z_{1,t-1} + \phi_{22} Z_{2,t-1} + a_{2,t} + \theta_{21} a_{1,t-1} + \theta_{22} a_{2,t-1} \qquad (3.2.3.34)$$

Dari (3.2.3.33) dan (3.2.3.34) maka diperoleh model VARMA(1,1) seperti pada (3.2.3.22).

3.3 Uji kecocokan model dan Analisis korelasi kanonik

Representasi *state space* yang diberikan pada bagian sebelumnya tidaklah unik. Sebagai contoh, dari (3.1.4), dapat dibentuk sebuah vektor *state* baru $V_t = MY_t$ untuk setiap matriks nonsingular **M,** sehingga diperoleh sebuah representasi *state space* baru:

$$V_{t+1} = A_1 V_t + G_1 a_{t+1} \tag{3.3.1}$$

dan

$$Z_t = H_1 V_t \tag{3.3.2}$$

Di mana $A_1 = \mathrm{MAM}^{-1}$, $G_1 = \mathrm{MG}$, dan $H_1 = \mathrm{HM}^{-1}$. Akan tetapi, berdasarkan representasi kanonik yang ditunjukan pada Akaike (1976), tetap saja akan didapatkan sebuah solusi yang unik. Dalam representasi korelasi kanonik, vektor *state* adalah unik yang ditentukan berdasarkan analisis korelasi kanonik antara himpunan informasi saat ini dan observasi sebelumnya $(Z_n, Z_{n-1}, \ldots,)$ dengan himpunan informasi saat ini dan nilai yang akan datang $\left(Z_n, Z_{n+1|n}, \ldots,\right)$. Dalam model ARMA, karena fungsi peramalan akhirnya akan ditentukan oleh polinomial AR dan $\left(Z_n, Z_{n-1}, \ldots, Z_{n-p}\right)$ berisi semua informasi yang diperlukan untuk nilai yang akan datang dari proses, maka analisis korelasi kanonik secara sederhana dilakukan antara data *space*

$$D_n = \left(Z'_n, Z'_{n-1}, \ldots, Z'_{n-p}\right)' \tag{3.3.3}$$

Dan predictor *space*

$$F_n = (Z'_n, Z'_{n+1|n}, \dots, Z'_{n+p|n})' \tag{3.3.4}$$

Berdasarkan matriks block hankel, kovarian antara $D_n = (Z'_n, Z'_{n-1}, \dots, Z'_{n-p})'$ dengan $F_n = (Z'_n, Z'_{n+1|n}, \dots, Z'_{n+p|n})'$ didefinisikan oleh:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma(1) & \cdots & \Gamma(p) \\ \Gamma(1) & \Gamma(2) & \cdots & \Gamma(p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma(p) & \Gamma(p+1) & \cdots & \Gamma(2p) \end{bmatrix}, \tag{3.3.5}$$

dengan menggunakan sifat ekpektasi bersyarat, maka $Cov(Z_{n-i},\ Z_{n+j|n}) = Cov(Z_{n-i},\ Z_{n+j})$. Untuk model vektor ARMA secara umum, Akaike (1974a, 1976) menunjukan bahwa dibawah asumsi nonsingularitas untuk $\Gamma(0)$, rank Γ adalah sama dengan dimensi dari vektor *state* dan juga sama dengan jumlah korelasi kanonik yang tidak nol antara D_n dan F_n.

Ketika model tidak diketahui, pemilihan untuk order *p* diperoleh dari uji kecocokan data yang optimal dari AR, yang seringkali berdasarkan pada nilai AIC *(Akaike Information Criterion).* Untuk proses vektor, AIC didefinisikan:

$$AIC = n \ln|\Sigma_p| + 2pm^2 \tag{3.3.6}$$

Di mana:

n = jumlah observasi

$|\Sigma_p|$ = determinan kovarian matrik untuk inovasi atau rangkaian *white noise* pada uji kecocokan AR(p).

m = dimensi dari vektor proses Z_t.

AR order *p* optimal dipilih ketika nilai AIC minimum. Jadi, analisis korelasi kanonik akan didasarkan pada matriks block Hankel dari kovarian sampel, yaitu:

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} \hat{\Gamma}(0) & \hat{\Gamma}(1) & \cdots & \hat{\Gamma}(p) \\ \hat{\Gamma}(1) & \hat{\Gamma}(2) & \cdots & \hat{\Gamma}(p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\Gamma}(p) & \hat{\Gamma}(p+1) & \cdots & \hat{\Gamma}(2p) \end{bmatrix} \tag{3.3.7}$$

Di mana $\hat{\Gamma}(j)$, j = 0, 1, ..., 2*p*. Adalah matriks kovarian sampel yang didefinisikan:

$$\hat{\Gamma}(s) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-s}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+s} - \bar{Z}); \quad s = 1,2, ...,$$

Di mana $\bar{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ adalah rata-rata vektor sampel.

Seperti pada bagian sebelumnya, beberapa komponen dari vektor prediksi $Z_{n+i|n}$ mungkin merupakan kombinasi linear dari komponen lainnya, sehingga analisis korelasi kanonik dilakukan antara semua komponen data *space*

$$D_n = [Z_{1,n}, Z_{2,n}, \cdots, Z_{m,n}, Z_{1,n-1}, Z_{2,n-1}, \dots, Z_{m,n-1}, \dots, Z_{1,n-p}, Z_{2,n-p}, \dots, Z_{m,n-p}]' \tag{3.3.8}$$

Dan komponen predictor *space*

$$F_n = [Z_{1,n}, Z_{2,n}, \cdots, Z_{m,n}, Z_{1,\,n+1|n}, Z_{2,\,n+1|n} \cdots, Z_{m,\,n+1|n}, \dots, Z_{1,\,n+p|n}, Z_{2,\,n+p|n}, \dots, Z_{m,\,n+p|n}]' \tag{3.3.9}$$

Karena vektor *state* diketahui sebagai suatu subset dari predictor *space*, sebuah urutan vektor *state* yang potensial Y_n^j ditentukan berdasarkan analisis korelasi kanonik antara rangkaian F_n^j (subset dari F_n) dengan data *space* D_n, yang didasarkan pada submatriks $\hat{\Gamma}^j$ yang terbentuk dari kolom $\hat{\Gamma}$, yang sesuai dengan komponen D_n dan F_n^j.

Secara spesifik, karena korelasi kanonik antara $Z_n = [Z_{1,n}, Z_{2,n}, \cdots, Z_{m,n}]'$ dan D_n adalah $1,1,\cdots,1$, jelas tidak sama dengan nol, maka vektor *state* adalah himpunan dari Z_n dan subset pertama dari urutan F_n^1 adalah himpunan dari $[Z_{1,n}, Z_{2,n}, \cdots, Z_{m,n}, Z_{1,\,n+1|n}]'$. Jika korelasi kanonik yang terkecil dari $\hat{\Gamma}^1$ dianggap nol, maka kombinasi linear dari F_n^1 tidak berkorelasi dengan data *space* D_n. jadi, komponen $Z_{1,\,n+1|n}$ dan setiap $Z_{1,\,n+i|n}$ dikeluarkan dari pertimbangan untuk menjadi komponen pada vektor *state*. Jika nilai korelasi kanonik yang terkecil dianggap tidak sama dengan nol, maka $Z_{1,\,n+1|n}$ ditambahkan kedalam vektor *state*. Rangkaian F_n^j, sekarang dapat digeneralisasi dengan menambahkannya pada vektor *state*. Komponen selanjutnya dari F_n tidak dapat disamakan dengan komponen yang sebelumnya telah gagal dimasukan kedalam vektor *state*.

Korelasi kanonik terkecil dari $\hat{\Gamma}^j$ dapat dihitung dan diuji signifikansinya. Jika nilai korelasi kanonik tersebut berbeda secara signifikan dengan nol maka komponen dimasukan pada vektor *state*. Dan sebaliknya, jika nilai korelasi kanonik tersebut tidak berbeda secara signifikan dengan nol maka komponen dikeluarkan dari vektor *state* dan dikeluarkan dari pertimbangan selanjutnya. Pemilihan vektor *state* selesai ketika tidak ada lagi unsur dari F_n yang dapat dimasukan kedalam vektor *state*.

Untuk masing-masing langkah dalam urutan analisis korelasi kanonik, signifikansi dari nilai korelasi kanonik yang terkecil ditandai dengan $\hat{\rho}_{min}$ didasarkan pada nilai AIC (Akaike, 1976):

$$C = -n\ln(1-\hat{\rho}_{min}^2) - 2[m(p+1) - q + 1] \qquad (3.3.10)$$

Di mana q adalah dimensi dari F_n^j pada tahap sekarang. Jika $C \leq 0$, maka ρ_{min} dianggap tidak berbeda secara signifikan dengan nol. Dan sebaliknya, jika $C > 0$

maka ρ_{min} dianggap berbeda secara signifikan dengan nol. Untuk menguji signifikansi korelasi kanonik dapat juga digunakan pendekatan uji χ^2 yang diberikan bartlett (1941), statistiknya

$$\chi^2 = -\left(n - \frac{1}{2}[m(p+1) + q + 1]\right) \ln(1 - \hat{\rho}_{min}^2) \quad (3.3.10)$$

Sebuah pendekatan distribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan $m(p+1) - q + 1$, ditulis $\chi^2(m(p+1) - q + 1)$. Hipotesis yang harus diuji adalah:

H₀ : ρ_{min} tidak berbeda secara signifikan dengan nol.

H₁ : ρ_{min} berbeda secara signifikan dengan nol.

Dengan kriteria pengujian, tolak H₀ jika $\chi^2_{hitung} \geq \chi^2_{tabel}$.

3.4 Estimasi parameter

Setelah vektor *state* diidentifikasi, diperoleh representasi kanonik dari model *state space:*

$$Y_{t+1} = AY_t + Ga_{t+1}$$
$$Z_t = HY_t \quad (3.4.1)$$

Di mana a_t adalah rangkaian vektor *white noise* Gauss dengan rata-rata nol dan matriks varians-kovarians Σ_a, a_t −iid $N(0, \Sigma_a)$, dan $H = [I_m, 0]$ dengan I_m adalah matriks identitas $m \times m$. Jelas, dari hasil bagian 3.2, estimasi untuk matriks A, G dan Σ_a dapat diperoleh dari estimasi parameter uji kecocokan model AR yang optimal. bagaimanapun, estimasi lebih lanjut untuk elemen matriks transisi A akan diperoleh dari analisis korelasi kanonik. Contoh, misalkan k merupakan jumlah komponen vektor *state* akhir dari Y_t, sehingga A adalah matriks transisi $k \times k$. Dari (3.3.9), dapat diketahui bahwa $m \leq k \leq m(p+1)$. Sekarang akan diilustrasikan bagaimana estimasi baris pertama dari A diperoleh, yang dihubungkan dengan langkah pertama dari urutan analisis korelasi kanonik ketika $Z_{1,\, n+1|n}$ ditambahkan pada vektor Z_n untuk membentuk subset pertama F_n^1 dalam memutuskan apakah $Z_{1,\, n+1|n}$ harus dimasukan kedalam vektor *state*. Ketika korelasi kanonik terkecil antara F_n^1 dan D_n dianggap tidak sama dengan nol, $Z_{1,\, n+1|n}$ menjadi komponen ke $(m+1)$ dari vektor *state*. Jadi, baris pertama dari A akan mempunyai 1 dalam kolom ke $(m+1)$ dan 0 ditempat lainnya. Ketika korelasi kanonik terkecil dianggap sama dengan nol, kombinasi linear dari F_n^1 tidak berkorelasi dengan data *space* D_n, dan $Z_{1,\, n+1|n}$ dikeluarkan dari vektor *state*. Karena determinan dari $\hat{\Gamma}(0)$ adalah nol, koefisien dari $Z_{1,\, n+1|n}$ dalam kombinasi linear dapat diambil untuk menjadi kesatuan. Dengan begitu, diperoleh hubungan $Z_{1,\, n+1|n} = \alpha' Z_n$; koefisien dari vektor α digunkan sebagai estimasi dari m kolom pertama dari baris pertama matriks transisi A, dan sisa $(k-m)$ kolom dari baris pertama tersebut adalah nol. Estimasi untuk baris yang lainnya dari A dapat diperoleh dengan cara yang sama.

Alternatif lain, setelah model *state space* pada (3.4.1) diidentifikasi, dapat digunakan prosedur maksimum likelihood untuk mendapatkan lebih banyak koefisien estimasi dari A, G dan Σ_a. Untuk memberikan urutan *n* observasi $Z_1, Z_2, \dots, dan\ Z_n$, sebab:

$$Y_t = (I - AB)^{-1} G a_t \tag{3.4.2}$$

Sedangkan,

$$Z_t = H(I - AB)^{-1} G a_t \tag{3.4.3}$$

Dan,

$$a_t = [H(I - AB)^{-1}G]^{-1}Z_t \tag{3.4.5}$$

Dengan demikian, fungsi log-likelihood, menjadi

$$\ln L(A, G, \Sigma_a | Z_1, Z_2, \dots, Z_n) \propto -\frac{n}{2}\ln|\Sigma_a| - \frac{1}{2} trace \Sigma_a{}^{-1} \mathrm{S(A, G)} \tag{3.4.6}$$

Di mana,

$$\mathrm{S(A, G)} = \sum_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{n}} a_t a'_{\mathrm{t}} \tag{3.4.7}$$

Adalah estimasi maksimum likelihood yang biasa. Dengan demikian, sekarang estimasi maksimum likelihood dapat digunakan untuk memperoleh estimasi dari A, G dan Σ_a. Estimasi yang diperoleh dari analisis korelasi kanonik dapat digunakan sebagai estimasi awal dalam prosedur estimasi koefisien yang lebih banyak lagi.

3.5 Peramalan

Diberikan estimasi dari A, G dan Σ_a, nilai ramalan untuk Z_t dihitung berdasarkan ekspektasi bersyarat dari Y_t. Dalam peramalan, parameter A, G dan Σ_a diganti dengan nilai estimasi yang telah spesifik/diuji signifikansinya (biasanya dengan uji t). Peramalan satu langkah kedepan diberikan untuk observasi Z_t di mana $t \leq n$. Sedangkan untuk observasi Z_t dengan $t > n$, peramalan *l*-langkah kedepan diberikan untuk $l = t - n$. Peramalan secara rekursif dihasilkan dengan kondisi awal $Y_0 = 0$.

Peramalan *l*-langkah kedepan dari Y_{t+l} adalah $Y_{t+l|t}$, di mana $Y_{t+l|t}$ merupakan ekspektasi bersyarat dari Y_{t+l} yang merupakan informasi yang diperoleh pada waktu t. Ramalan *l*-langkah kedepan dari Z_{t+l} adalah:

$$Z_{t+l|t} = HY_{t+l|t} \tag{3.5.1}$$

Di mana $H = [I_m, 0]$.

Dengan uraian sebagai berikut:

Diberikan $\psi_i = \mathrm{A}^{\mathrm{i}}\mathrm{G}$. Catat bahwa elemen $k - n$ terakhir dari Y_t mengandung elemen $Z_{u|t}$ untuk $u > t$. Vektor *state* Y_{t+l} dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$Y_{t+l} = \mathrm{A}^l Y_t + \sum_{i=0}^{l-1} \psi_i a_{t+l-i} \tag{3.5.2}$$

Karena $a_{t+i|t} = 0$ untuk $i > 0$, maka ramalan *l*-langkah kedepan adalah:

$$Y_{t+l|t} = \mathrm{A}^l Y_t = AY_{t+l-1|t} \tag{3.5.3}$$

Sehingga, ramalan *l*-langkah kedepan untuk Z_{t+l} adalah:

$$Z_{t+l|t} = HY_{t+l|t}$$

Dengan error ramalan *l*-langkah kedepan:

$$Y_{t+l} - Y_{t+l|t} = \sum_{i=0}^{l-1} \psi_i a_{t+l-i} \tag{3.5.4}$$

Dan varians error ramalan adalah:

$$V_{y,l} = \sum_{i=0}^{l-1} \psi_i \Sigma_a \psi_i' \tag{3.5.5}$$

Diberikan $V_{y,0} = 0$, varians error ramalan *l*-langkah kedepan Y_{t+l}, maka $V_{y,l}$ dapat dihitung secara rekursif seperti berikut:

$$V_{y,l} = V_{y,l-1} + \psi_{l-1} \Sigma_a \psi_{l-1}' \tag{3.5.6}$$

Varians error ramalan *l*-langkah kedepan Y_{t+l} adalah sub matriks $n \times n$ dari $V_{y,l}$, yaitu:

$$V_{z,l} = HV_{y,l}H' \tag{3.5.7}$$