BAB III

TEORI PERMAINAN

3.1. Pengantar Teori Permainan

Teori permainan (*game theory*) adalah suatu pendekatan matematis untuk merumuskan situasi persaingan dan konfliks antar berbagai kepentingan. Beberapa istilah yang digunakan dalam teori permainan adalah:

1. Pemain adalah pihak yang terlibat langsung dalam permainan. Pemain dapat bermain secara individu atau dapat berkelompok (perusahaan, negara). Tiap pemain memiliki strategi yang mungkin diambilnya yang berisikan keuntungan yang diambilnya dari tindakan tersebut. Secara konsisten pemain akan memilih pilihan yang terbaik yang menurutnya akan memiliki keuntungan yang sebesar-besarnya bagi dirinya dan kerugian atau resiko yang sekecil-kecilnya.
2. Strategi adalah rencana secara menyeluruh dari seorang pemain, sebagai reaksi atas aksi yang mungkin dilakukan oleh pemain lain yang menjadi pesaingnya. Dalam hal ini diasumsikan bahwa strategi tidak dipengaruhi oleh faktor lain.
3. Matriks nilai pembayaran (*pay off*) adalah matriks yang setiap elemennya menunjukkan hasil dari setiap strategi permainan yang dimainkan.
4. Strategi optimum adalah strategi yang menyebabkan posisi paling menguntungkan.

5. Nilai permainan adalah hasil yang diperoleh setiap pemain dengan menggunakan strategi optimum.

Model teori permainan dapat diklasifikasikan berdasarkan jumlah pemain dalam sebuah permainan. Bila jumlah pemain adalah dua, permainan disebut sebagai permainan dua pemain. Bila jumlah pemain adalah berjumlah N (N $\geq$ 3), permainan disebut permainan N pemain. Kemudian pada permainan dua pemain dapat dibagi menjadi dua, yaitu perminan berjumlah nol dua pemain (*Two Person Zero Sum Game*) dan permainan berjumlah tak nol dua pemain (*Two Person Non Zero Sum Game*).

3.2. Permainan Berjumlah Nol Dua Pemain

Permainan berjumlah nol dua pemain merupakan persaingan dari dua pemain dimana kemenangan yang satu merupakan kekalahan pemain lainnya, sehingga jumlah kemenangan dan kekalahan adalah nol (Trueman, 1974).

Misalkan ada dua pemain, A dan B yang sedang bersaing untuk memenangkan suatu permainan. Dalam usaha untuk memenangkan permainan, A mempunyai m kemungkinan strategi. Sedangkan B mempunyai n kemungkinan strategi. Pemain A memperoleh keuntungan sebesar a_{ij} jika menggunakan strategi ke-i dengan syarat B memilih strategi ke-j. Permainan di atas dapat dinyatakan dengan matriks *pay off* untuk A sebagai berikut:

Strategi B

Strategi A		B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
	A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Matriks *Pay off* Umum Bagi Pemain A

Jika pada baris dan kolom tertentu angkanya positif maka A dikatakan menang, tetapi jika negatif maka A dikatakan kalah. Dianggap bahwa kedua pemain sudah mengetahui strategi lawan, artinya jika A memillih strategi tertentu dan B juga memilih strategi tertentu, maka A dan B tahu apa yang akan diperolehnya. Matriks pembayaran B dapat diperoleh dengan cara men-transpose matriks pembayaran untuk A kemudian mengalikan setiap elemennya dengan −1, sebab kemenangan dari A merupakan kekalahan B.

Strategi A

Strategi B		A_1	A_2	…	A_j	…	A_n
	B_1	$-a_{11}$	$-a_{12}$	…	$-a_{i1}$	…	$-a_{m1}$
	B_2	$-a_{12}$	$-a_{22}$	…	$-a_{i2}$	…	$-a_{m2}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	B_j	$-a_{1j}$	$-a_{2j}$	…	$-a_{ij}$	…	$-a_{mj}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	B_n	$-a_{1n}$	$-a_{2n}$	…	$-a_{in}$	…	$-a_{mn}$

Matriks *Pay off* Umum Bagi Pemain B

Dalam teori permainan, setiap pemain akan memainkan permainan sampai para pemain mendapatkan keuntungan yang optimum. Bagaimanapun juga hasil yang didapat tidak ditentukan sendiri, tetapi juga bergantung pada pilihan lawan.

Secara umum, permainan dinyatakan dengan matriks $m \times n$, contohnya antara lain matriks permainan $2 \times n$ dan $m \times 2$, dimana seorang pemain mempunyai lebih dari dua pilihan strategi. Untuk menyelesaikan permainan tersebut ada cara mengubah matriks permainan $2 \times n$ dan $m \times 2$ menjadi 2×2 agar lebih mudah diselesaikan yaitu dengan menghapus baris atau kolom yang didominasi (*dominated*) baris atau kolom lainnya. Bila semua elemen dalam suatu kolom lebih besar atau sama dengan elemen dalam posisi yang sama dari kolom lain, kolom tersebut dikatakan mendominasi (*dominates*) kolom lainnya. Jika semua elemen dari suatu baris sama atau lebih kecil dengan elemen dalam posisi yang sama dari baris lain, baris tersebut juga dikatakan mendominasi (*dominated*) baris lainnya. Berikut adalah contoh permainan $m \times 2$ dengan $m = 3$.

Contoh 3.1

		Strategi B	
		1	2
	1	2	4
Strategi A	2	−5	−2
	3	3	2

Pemain A tidak akan memilih strategi 2 (baris 2) karena baris 2 *dominated* dan harus

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA • PERPUSTAKAAN •

dihapus. Matriks *pay off* mengecil menjadi 2×2 seperti berikut:

$$\begin{array}{cc} & \text{Strategi B} \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \text{Strategi A} \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Kemudian untuk permainan $2 \times n$ diberikan contoh dengan n = 4 sebagai berikut:

Contoh 3.2

$$\begin{array}{cc} & \text{Strategi B} \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \text{Strategi A} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & -5 & -8 \\ \hline 2 & 4 & -7 & -2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Pemain B tidak mungkin memilih strategi 1 dan 2 (kolom 1 dan 2) karena kolom ini mempunyai elemen-elemen yang lebih besar dari elemen-elemen kolom 3 dan 4. Jika B memilih strategi 1 dan 2 berarti membiarkan A mencapai kemenangan. Sedangkan B mengalami kekalahan, karena itu B akan memilih strategi 3 dan 4. Dengan demikian matriks *pay off* mengecil menjadi 2×2 seperti berikut:

$$\begin{array}{cc} & \text{Strategi B} \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \text{Strategi A} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline -5 & -8 \\ \hline -7 & -2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

3.2.1. Metode Minimaks dan Maksimin

Dalam menentukan metode yang digunakan untuk menyelesaikan sebuah permainan, pertama dilihat apakah permainan tersebut mempunyai titik sadel (titik keseimbangan). Titik sadel adalah nilai dimana kemenangan yang diperoleh oleh pemain A dapat diterima oleh pemain B atau sebaliknya. Metode minimaks dan maksimin digunakan untuk mencari titik sadel.

Contoh 3.3

		Strategi B		
		B_1	B_2	Minimum baris
	A_1	2	−4	−4
Strategi A	A_2	(3)	5	3
	A_3	−2	6	−2
Maksimum kolom		3	6	

Pada Contoh 3.3 jika pemain A memainkan strategi pertama maka A akan memperoleh 2 atau −4 tergantung pada strategi yang dipilih oleh B. Tetapi dapat dipastikan A akan memperoleh setidaknya $\min\{2, -4\} = -4$ tanpa bergantung pada strategi yang dipilih B. Demikian pula jika A memilih strategi kedua maka A akan memperoleh setidaknya $\min\{3, 5\} = 3$, dan jika A memilih strategi ketiga maka A akan memperoleh setidaknya $\min\{-2, 6\} = -2$. Jadi nilai minimum di setiap baris mewakili keuntungan minimum yang didapat A jika memainkan strategi murni. Nilai-nilai tersebut ditunjukkan dalam Contoh 3.3 pada "minimum baris". Dengan memilih strategi yang kedua, pemain A memaksimumkan keuntungan minimumnya, dan keuntungan ini diketahui $\max\{-4, 3, -2\} = 3$. Pemilihan pemain A disebut strategi maksimin dari permainan.

Sebaliknya pemain B ingin meminimumkan kerugian, jika B memilih strategi pertama, B akan mengalami kerugian tidak lebih dari max{2, 3, −2} = 3 tanpa bergantung pada strategi yang dipilih A. Dan jika memainkan strategi kedua, B akan mengalami kerugian tidak lebih dari max{−4, 5, 6} = 6. Hasil yang bersesuaian ditunjukkan dalam Contoh 3.3 pada "maksimum kolom". Jadi pemain B akan memilih strategi yang meminimumkan kerugian maksimumnya, yaitu diketahui min{3, 6} = 3. Pemilihan pemain B disebut strategi minimaks dan kerugiannya disebut nilai minimaks. Dalam Contoh 3.3 titik sadel terdapat pada baris kedua kolom pertama yaitu elemen a_{21} = 3. Hal ini dapat terjadi karena pemain A akan mendapat keuntungan yang paling besar jika memilih strategi 2, maka pemain B akan meminimumkan kerugian maksiminnya dengan memilih strategi pertama.

Secara umum jika pemain A mempunyai *m* strategi dan pemain B mempunyai *n* strategi. Elemen a_{ij} merupakan besarnya *pay off* yang diterima oleh A (Taha, 1996). Jika pemain A memilih strategi *i* maka paling sedikit A akan memenangkan

$$\min_j \{a_{ij}\}$$

pemain A akan memilih strategi yang akan memberikan nilai maksimum yaitu:

$$\max_i \ \min_j \{a_{ij}\}$$

pemain B berusaha mencegah A untuk mencapai kemenangan. Maka dari itu jika pemain B memilih strategi *j* dia yakin bahwa pemain A akan mendapat keuntungan tidak lebih dari:

$$\max_i \{a_{ij}\}$$

pemain B akan memilih strategi yang meminimumkan kerugian yaitu:

$$\min_{j} \max_{i}\{a_{ij}\}$$

Jika diperoleh suatu elemen a_{kl} dimana:

$$a_{kl} = \max_{i} \min_{j}\{a_{ij}\} = \min_{j} \max_{i}\{a_{ij}\}$$

maka elemen a_{kl} dikatakan sebagai titik sadel. Dalam suatu permainan dimana nilai maksimin sama dengan nilai minimaks, strategi murni yang bersangkutan disebut strategi optimum dan permainan tersebut dikatakan mempunyai titik sadel. Nilai permainan pada strategi murni yang optimum sama dengan nilai maksimin dan nilai minimaks tersebut.

3.2. Permainan Berjumlah Tak Nol Dua Pemain

Permainan berjumlah tak nol dua pemain merupakan perluasan permainan berjumlah nol dua pemain pada subbab 3.2, perbedaannya adalah kemenangan satu pemain belum tentu kekalahan pemain lainnya. Karena itu penyelesaiaannya pun menjadi lebih kompleks dan lebih sulit untuk menentukan hasil permainannya, tetapi pada dunia nyata permasalahan permainan berjumlah tak nol dua pemain lebih sering ditemui daripada permasalahan berjumlah nol. Metode yang digunakan untuk menyelesaikannya menggunakan pemikiran pada permainan berjumlah nol dua pemain.

Misalkan ada dua pemain, A dan B yang sedang bersaing untuk memenangkan suatu permainan. Dalam usahanya untuk memenangkan permainan, A mempuyai m kemungkinan strategi. Sedangkan B mempunyai n kemungkinan strategi. Pemain A memperoleh keuntungan sebesar a_{ij} jika menggunakan strategi ke-i dengan syarat B memilih strategi ke-j. Permainan di atas dapat dinyatakan dengan matriks *pay off* sebagai berikut:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Strategi B} \\
 & & \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_j & \ldots & B_n \end{array} \\
\text{Strategi A} & \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_m \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc}
(a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) & \ldots & (a_{1j},b_{1j}) & \ldots & (a_{1n},b_{1n}) \\
(a_{21},b_{21}) & (a_{22},b_{22}) & \ldots & (a_{2j},b_{2j}) & \ldots & (a_{2n},b_{2n}) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(a_{i1},b_{i1}) & (a_{i2},b_{i2}) & \ldots & (a_{ij},b_{ij}) & \ldots & (a_{in},b_{in}) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(a_{m1},b_{m1}) & (a_{m2},b_{m2}) & \ldots & (a_{mj},b_{mj}) & \ldots & (a_{mn},b_{mn})
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Matriks *Pay off* Umum Bagi Pemain (A,B)

Angka positif pada setiap elemen (a_{ij}, b_{ij}) menyatakan kemenangan yang didapat oleh masing-masing pemain, sedangkan angka negatif menyatakan kekalahan yang didapat oleh masing-masing pemain jika A memainkan strategi A_i dan B memainkan strategi B_j.

Contoh 3.4

Jika pemain A mempunyai 3 strategi A_1, A_2, A_3 dan B mempunyai 2 strategi B_1, B_2.

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
PERPUSTAKAAN

Maka matriks permainan di atas adalah sebagai berikut:

		Strategi B	
		B_1	B_2
	A_1	$(-2, 3)$	$(1, 2)$
Strategi A	A_2	$(4, 3)$	$(2, 1)$
	A_3	$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$	$(3, 1)$

Elemen (1, 2) menyatakan bahwa jika A memainkan strategi A_1, dan B memainkan strategi B_2 maka *pay off* yang didapatkan oleh A adalah 1 dan *pay off* yang didapatkan oleh B adalah 2. Jika *pay off* A dijumlahkan dengan *pay off* B yaitu 1 + 2 adalah 3 dimana hasilnya tidak sama dengan nol. Jika diperlukan, matriks *pay off* pemain A dan B dapat ditulis secara terpisah sehingga menjadi:

	B_1	B_2
A_1	-2	1
A_2	4	2
A_3	$\frac{3}{2}$	3

	B_1	B_2
A_1	3	2
A_2	3	1
A_3	2	1

Dengan menggunakan metode maksimin pada permainan berjumlah nol akan ditentukan *pay off* minimum masing-masing pemain.

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA PERPUSTAKAAN

	B_1	B_2	Minimum baris	
A_1	-2	1	-2	
A_2	4	2	2	
A_3	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	← Maksimin

Matriks *Pay off* dengan Maksimin untuk A

	B_1	B_2
A_1	3	2
A_2	3	1
A_3	2	1
Minimum kolom	2 ↑	1
	Maksimin	

Matriks *Pay off* dengan Maksimin untuk B

Nilai maksimum untuk pemain A dan B adalah 2, dan nilai tersebut berada pada baris A_2 dan kolom B_1 dengan *pay off* (4, 3). Karena pada subbab ini dibahas mengenai permainan berjumlah tak nol dua pemian maka metode maksimin dan minimaks tidak digunakan, karena masing-masing pemain berusaha untuk memaksimumkan keuntungan. Selain metode maksimin dapat juga digunakan metode *dominance*. Pada contoh di atas, dapat dilihat bahwa B_1 mendominasi B_2 maka

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
PERPUSTAKAAN

dengan memainkan strategi B_1, pemain B akan mendapatkan *pay off* lebih besar daripada memainkan strategi B_2. Karena itu B akan memainkan strategi B_1, dan jika dilihat pada matriks *pay off* untuk A, keuntungan terbesar yang didapat oleh A adalah jika A memainkan strategi A_2. Dengan demikian, A akan memainkan strategi A_2 dan B memainkan strategi B_1, sehingga *pay off* yang didapat oleh pemain A adalah 4 dan untuk pemain B adalah 3.

3.3.1. Keseimbangan Nash (Nash *Equilibrium*)

Titik sadel adalah istilah yang digunakan pada permainan berjumlah nol dua pemain, sedangkan pada permainan berjumlah tak nol digunakan istilah titik keseimbangan Nash (Nash *Equilibrium*). Keseimbangan Nash menggambarkan kondisi dimana satu pihak mengambil keputusan berdasarkan keputusan pihak lain. Pembahasan sebelumnya menunjukkkan bahwa untuk menentukan titik keseimbangan Nash masih digunakan pemikiran pada permainan dua pemain.

3.3.1.1. Keseimbangan Murni Nash (*Pure* Nash *Equilibrium*)

Titik keseimbangan murni Nash adalah kondisi dimana masing-masing pemain memainkan satu strategi secara pasti. Pada Contoh 3.4 untuk mencari keseimbangan murni Nash dimisalkan elemen paling besar atau sama besar pada matriks diberi tanda #. Contohnya pada (A_1, B_1) komponennya adalah (−2, 3) dan (A_2, B_2) komponennya adalah (1, 2), karena 3 merupakan nilai terbesar pada komponen kedua yang menyatakan *pay off* bagi B maka nilai 3 diberi tanda #. Kemudian dilihat pada komponen pertama yang menyatakan *pay off* bagi pemain A, contohnya pada kolom pertama (−2, 3), (4, 3), dan $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, nilai 4 merupakan nilai terbesar maka 4 diberi tanda #. Tititk keseimbangna Nash adalah dimana setiap kemungkinan *pay off* pada semua komponen mempunyai tanda #. Permainan pada Contoh 3.4 menjadi seperti berikut:

		Strategi B	
		B_1	B_2
Strategi A	A_1	$(-2, 3^{\#})$	$(1, 2)$
	A_2	$(4^{\#}, 3)$	$(2, 1)$
	A_3	$\left(\frac{3}{2}, 2^{\#}\right)$	$(3^{\#}, 1)$

Pada elemen (4, 3) semua komponen mempunyai tanda #. Sehingga dapat disimpulkan bahwa (4, 3) adalah titik keseimbangan Nash karena elemen tersebut merupakan hasil optimum bagi kedua pemain.

3.3.1.2. Keseimbangan Campuran Nash (*Mixed* Nash *Equilibrium*)

Jika suatu permainan tidak mempunyai titik keseimbangan murni Nash maka dapat dicari titik keseimbangan campuran Nash. Untuk mencari titik keseimbangan campuran Nash yang juga masih menggunakan pemikiran metode strategi pada permainan berjumlah nol, perbedaannya adalah digunakan perhitungan turunan parsial pada keseimbangan campuran Nash.

Contoh 3.5

		Strategi B	
		y	$1 - y$
Strategi A	x	(3, 6)	(6, 3)
	$1 - x$	(4, 1)	(2, 4)

Pada Contoh 3.5 pemain A mempunyai strategi A_1 dan A_2 , dan pemain B mempunyai strategi B_1 dan B_2, dimisalkan:

$X = (x, 1 - x)$ adalah peluang strategi campuran bagi A

$Y = (y, 1 - y)$ adalah peluang strategi campuran bagi B

$P_A(x, y)$ adalah nilai ekspektasi *pay off* bagi A saat A memainkan strategi X dan B memainkan strategi Y.

$P_B(x, y)$ adalah nilai ekspektasi *pay off* bagi B saat A memainkan strategi X dan B memainkan strategi Y.

$$\begin{aligned} P_A(x, y) &= x(3y + 6(1 - y) + (1 - x)(4y + 2(1 - y)) \\ &= x(6 - 3y) + (1 - x)(3y + 1) \\ &= -5xy + 4x + 2y + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_B(x, y) &= x(6y + 3(1 - y) + (1 - x)(y + 4(1 - y)) \\ &= x(3y + 3) + (1 - x)(4 - 3y) \\ &= 6xy - x + 4 - 3y \end{aligned}$$

Kemudian akan dicari titik keseimbangan Nash (X*, Y*), dimana X* = (x*, 1 − x*) dan Y* = (y*, 1 − y*). Pertama, akan dicari *pay off* yang paling maksimum di antara semua nilai *pay off* P_A(X, Y*). Nilai *payoff* maksimum dengan $0 \leq x \leq 1$ diperoleh pada saat $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, sehingga diperoleh y* = $\frac{4}{5}$. Dengan cara yang sama, dapat dicari nilai *pay off* P_B(X*, Y*) yang paling maksimum di antara semua nilai *pay off* P_B(X*, Y*). Nilai *pay off* maksimum dengan $0 \leq y \leq 1$ diperoleh pada saat $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, sehingga diperoleh x* = $\frac{1}{2}$.

Berdasarkan perhitungan di atas didapat X* = $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dan Y* = $\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Sehingga nilai ekspektasi *pay off* bagi A adalah dan nilai ekspektasi *payoff* bagi B adalah $\frac{18}{5}$ dan nilai *pay off* bagi B adalah $\frac{7}{2}$.

3.4. Permainan dengan N Pemain

Sebelumnya sudah dibahas permainan dengan dua pemain, tetapi pada dunia nyata permainan yang melibatkan lebih dari dua pemain ($N \geq 3$) lebih sering ditemui. Permainan dengan N pemain juga dapat dibagi menjadi dua berdasarkan jumlah *pay off* yang didapat masing-masing pemain yaitu permainan berjumlah nol dan permainan berjumlah tak nol dengan N pemain.

Pada permainan dengan N = 3 pemain A mempunyai strategi ($A_1, \dots, A_r$), pemain B mempunyai ($B_1, \dots, B_m$) dan C mempunyai strategi ($C_1, \dots, C_n$). Untuk setiap A_i dapat dinyatakan dengan matriks m x *n* dengan *m* baris menyatakan strategi B ($B_1, \dots, B_m$) dan kolom *n* menyatakan strategi C ($C_1, \dots, C_n$). Elemen baris ke-*j* dan kolom ke-*k* akan menyatakan tiga jumlah *pay off* bagi A, B, dan C jika memainkan strategi A_i, B_j, C_k.

3.4.1. Permainan Berjumlah Nol

Permainan berjumlah nol denagn N pemain, pada kasus ini N = 3, jumlah *pay off* dari masing-masing pemain adalah nol. Pada permainan ini salah satu atau ketiga pemain mempunyai kemungkinan mendapat keuntungan ataupun kerugian.

Misalkan ada tiga pemain A, B, dan C masing-masing mempunyai dua strategi. Permainan di atas dapat dinyatakan dalam matriks permainan 2 x 2 sebagai berikut:

Contoh 3.6

A_1	C_1	C_2
B_1	(2, −1,−1)	(−1, 0, 1)
B_2	(0, 0, 0)	(0, 1, −1)

A_2	C_1	C_2
B_1	(−2, 1, 1)	(0, 2, −2)
B_2	(1, −1, 0)	(1, 0, −1)

Dengan menggunakan matriks *pay off* di atas akan dicari strategi optimum bagi masing-masing pemain agar mendapatkan keuntungan optimum. Jika matriks *pay off* untuk pemain A, B, dan C pada Contoh 3.6 ditulis secara terpisah maka diperoleh:

A_1 C_1 C_2

B_1	2	−1
B_2	0	0

A_2	C_1	C_2
B_1	−2	0
B_2	1	1

Matriks *Pay off* Bagi Pemain A pada Contoh 3.6

A_1	C_1	C_2
B_1	−1	0
B_2	0	1

A_2	C_1	C_2
B_1	1	2
B_2	−1	0

Matriks *Pay off* Bagi Pemain B pada Contoh 3.6

A_1	C_1	C_2
B_1	−1	1
B_2	0	1

A_2	C_1	C_2
B_1	1	−2
B_2	0	−1

Matriks *Pay off* Bagi Pemain C pada Contoh 3.6

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA PERPUSTAKAAN

Ekspektasi *pay off* dari masing-masing pemain diperoleh sebagai berikut:

$$P_A = x[2yz - y(1-z)] + (1-x)[-2yz + (1-y)z + (1-y)z + (1-y)(1-z)]$$

$$= x\,[3yz - y] + (1-x)[-2yz - y + 1]$$

$$= 5xyz - 2yz - x - y + 1$$

$$P_B = x[-yz + (1-y)(1-z)] + (1-x)[yz + 2y(1-z) - (1-y)z]$$

$$= x[1 - y - z] + (1-x)(2y - z)$$

$$= -3xy + x + 2y - z$$

$$P_C = x[-3xyz + 2y + z - 1] + (1-x)[2yz - y + z - 1]$$

$$= -5xyz + 3xy + yz - y + z - 1$$

Kemudian dengan menghitung turunan parsial P_A terhadap z diperoleh X = $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, Y = $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, dan Z = $\left(\frac{4}{15}, \frac{11}{15}\right)$ dengan *pay off* $\left(-\frac{3}{20}, \frac{2}{5}, \frac{13}{12}\right)$. Sehingga dapat disimpulkan dengan memainkan A_1 dengan peluang $\frac{2}{3}$ dan memainkan A_2 dengan peluang $\frac{1}{3}$ pemain A akan mengalami kerugian sebesar $-\frac{3}{20}$, dengan memainkan B_1 dengan peluang $\frac{3}{4}$ dan memainkan B_2 dengan peluang $\frac{1}{4}$ pemain B akan mendapat keuntungan sebesar $\frac{2}{5}$, dan dengan memainkan C_1 dengan peluang $\frac{4}{15}$ dan memainkan C_2 dengan peluang $\frac{11}{15}$ pemain A akan mendapat keuntungan sebesar $\frac{13}{12}$.

3.4.2. Permainan Berjumlah Tak Nol

Permainan berjumlah tak nol pemain dengan N pemain, pada kasus ini N = 3, jumlah *pay off* dari masing-masing pemain belum tentu nol. Pada permainan ini ketiga pemain mempunyai kemungkinan kerugian atau keuntungan masing-masing. Permainan berjumlah tak nol pemain dengan N pemain dapat mempunyai titik keseimbangan murni Nash atau titik keseimbangan campuran Nash. Berikut diberikan contoh permainan dengan titik keseimbangna murni Nash dan titik keseimbangan campuran Nash.

3.4.2.1. Keseimbangan Murni Nash N Pemain

Misalkan ada tiga pemain A, B, dan C masing-masing mempunyai dua strategi. Permainan di atas dapat dinyatakan dalam dua matriks permainan 2 x 2 sebagai berukut:

Contoh 3.7

A_1	C_1	C_2
B_1	(1, 0, 2	(2, −1, 0)
B_2	(0, 4, 3)	(3, 1, 2)

A_2	C_1	C_2
B_1	(2, 1, 3)	(4, 1, 2)
B_2	(2, 2, 2)	(0, 0, 1)

Jika pemain A, B, dan C memainkan strategi A_2, B_1, dan C_2 maka *pay off* untuk pemain A adalah 4, untuk pemain B adalah 1, dan untuk pemain C adalah 2. Untuk mencari keseimbangan murni Nash akan dicari elemen paling besar (sama

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
PERPUSTAKAAN

besar) pada nilai *pay off* masing-masing pemain dan diberi tanda #. Nilai *pay off* terbesar bagi pemain A diberi tanda #, contohnya (A_1, B_1, C_1) dan (A_2, B_1, C_1) adalah (1, 0, 2) dan (2, 1, 3), karena 2 merupakan nilai terbesar pada komponen pertama yang menyatakan *pay off* bagi A maka nilai 2 diberi tanda #. Kemudian *pay off* bagi pemain B dilihat pada komponen kedua dari keempat kolom yang menyatakan *pay off* bagi B, contohnya pada kolom kedua (2, 1, 0) dan (3, 1, 2), nilai 1 merupakan nilai terbesar maka 1 diberi tanda #. Dengan cara yang sama, *pay off* bagi pemain C dilihat pada komponen ketiga dari keempat baris yang menyatakan *pay off* bagi pemain C, contohnya pada baris keempat (2, 2, 2) dan (0, 0, 1), nilai 2 merupakan nilai terbesar maka nilai 2 diberi tanda #. Titik keseimbangna Nash adalah dimana setiap kemungkinan *pay off* semua komponen mempunyai tanda # yang pada permainan pada Contoh 3.7 digambarkan sebagai berikut:

A_1	C_1	C_2
B_1	$(1, 0, 2^{\#})$	$(2, -1, 0)$
B_2	$(0, 4^{\#}, 3^{\#})$	$(3^{\#}, 1^{\#}, 2)$

A_2	C_1	C_2
B_1	$(2^{\#}, 1, 3^{\#})$	$(4^{\#}, 1^{\#}, 2)$
B_2	$(2^{\#}, 2^{\#}, 2^{\#})$	$(0, 0, 1^{\#})$

Dalam permainan di atas, pada (A_2, B_2, C_1) yaitu (2, 2, 2) semua komponen mempunyai tanda # maka disebut dengan titik keseimbangan murni Nash yang artinya jika A memainkan strategi 2, B memainkan strategi 2, dan C memainkan strategi 1 maka ketiga pemain akan mendapat keuntungan optimum yaitu 2 untuk pemain A, 2 untuk pemian B, dan 3 untuk pemain C.

3.4.2.2. Keseimbangan Campuran Nash N Pemain

Misalkan ada tiga pemain A, B, dan C masing-masing mempunyai dua strategi dengan matriks *pay off* sebagai berikut:

Contoh 3.8

A_1	C_1	C_2
B_1	(1, 2, −1,)	(−1, 1, 0)
B_2	(0, 1, 0)	(2, 0, 1)

A_2	C_1	C_2
B_1	(0, 3, 1)	(1, −1, 2)
B_2	(2, 1, 0)	(0, 0, 1)

Permainan di atas tidak mempunyai titik keseimbangan Nash, karena itu akan dicari titik keseimbangan campuran Nash dengan menggunakan turunan parsial. Dimisalkan X = $(x, 1 - x)$, Y = $(y, 1 - y)$, dan Z = $(z, 1 - z)$ berturut-turut adalah strategi campuran bagi pemain A, B, dan C. Maka *pay off* bagi masing-masing pemain adalah sebagai berikut:

$$P_A = x[yz - y(1 - z) + 2(1 - y)(1 - z) + (1 - x)[y(1 - z) + 2(1 - y)z]$$

$$= x[4xyz - 3y - 2z + 2] + (1 - x)[-3yz + y + 2z]$$

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA PERPUSTAKAAN

$= 7xyz - 4xy - 4xz - 3yz + 2x + y + 2z$

$P_B = x[2yz + y(1 - z) + (1 - y)z] + (1 - x)[3yz - y(1 - z) + (1 - y)z]$

$= x[yz + y] + (1 - x)[3yz - y + z]$

$= -2xyz + 2xy - xz + 3yz - y + z$

$P_C = x[-yz + (1 - y)(1 - z)] + (1 - x)[yz + 2y(1 - z) + (1 - y)(1 - z)]$

$= x[-y - z + 1] + (1 - x)[y - z + 1]$

$= -2xy + y - z + 1$

Selanjutnya akan dicari nilai nilai *x, y, z* yang menghasilkan *pay off* maksimum dengan menghitung turunan parsial P_A terhadap *x* sama dengan nol didapat $z = \frac{4y-2}{7y-4}$. Kemudian *pay off* bagi B diturunkan terhadap *y* didapat $x = \frac{1-3z}{-2z+2}$. Selanjutnya *pay off* bagi C diturunkan terhadap *z* didapat $z = 0$ dan jika disubstitusi ke persamaan sebelummnya maka diperoleh $x = \frac{1}{2}$, dan $y = \frac{1}{2}$. Dengan demikian titik keseimbangan campuran Nash adalah $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Z = (0, 1)$ sehingga *pay off* yang didapat masing-masing pemain adalah $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

3.4.3. Penggabungan Pemain (*Coalitions*)

Pada permainan dengan N pemain terdapat kemungkinan dua atau lebih pemain bergabung untuk melawan pemain lainnya. Para pemain yang bergabung dapat menyerasikan pilihan strategi masing-masing untuk mengalahkan lawannya.

3.4.3.1. Penggabungan Pemain Berjumlah Nol

Dengan menggunakan Contoh 3.6 jika pemain A dan pemain B bergabung untuk melawan B, maka didapat matriks *pay off* sebagai berikut:

	A_1C_1	A_1C_2	A_2C_1	A_2C_2
B_1	−1	0	1	2
B_2	0	1	−1	0

Karena permainan pada Contoh 3.6 adalah permainan berjumlah nol maka hanya perlu dituliskan *pay off* untuk B. Kemudian untuk menyelesaikannya dapat digunakan metode pada permainan berjumlah nol dua pemain, yaitu dengan metode grafik. Matriks diperkecil menjadi matriks 2 x 2 dengan menghapus kolom kedua dan keempat, sehingga matriks permainan menjadi:

	A_1C_1	A_2C_1
B_1	−1	1
B_2	0	−1

Matriks *Pay off* bagi Pemain B pada Contoh 3.6

Dengan menggunakan strategi campuran pada permainan berjumlah tak nol dua pemain diperoleh $x = \frac{1}{3}$ dan $y = \frac{2}{3}$, dengan nilai permainan adalah $-\frac{1}{3}$, yang artinya kekalahan maksimum yang mungkin dialami oleh C adalah $\frac{1}{3}$ dan pemain AC akan mendapat keuntungan paling sedikit $\frac{1}{3}$. Saat pemain B dan AC memainkan strategi campuran optimum maka *pay off* yang didapat adalah $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(2, -1, -1) +$

$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(-2, 1, 1) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(0, 0, 0) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(1, -1, 0) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}\right)$. Pemain B akan mengalami kekalahan sebesar $\frac{1}{3}$, C mengalami kekalahan sebesar $\frac{1}{9}$, sedangkan A akan mendapat keuntungan sebesar $\frac{4}{9}$.

Jika pemain B dan pemain C bergabung untuk melawan A, maka didapat matriks *pay off* untuk A sebagai berikut:

	A_1B_1	A_1B_2	A_2B_1	A_2B_2
C_1	−1	0	1	0
C_2	1	−1	−2	−1

Menggunakan metode grafik, kolom ketiga dan keempat dihapus sehingga matriks *pay off* menjadi:

	B_1C_1	B_1C_2	B_2C_1	B_2C_2
A_1	2	−1	0	0
A_2	−2	0	1	1

Menggunakan metode grafik, kolom ketiga dan keempat dihapus sehingga matriks *pay off* menjadi:

	B_1C_1	B_1C_2
A_1	2	−1
A_2	−2	0

Matriks *Pay Off* bagi Pemain C pada Contoh 3.6

Dengan menggunakan strategi campuran diperoleh $x = \frac{2}{5}$ dan $y = \frac{1}{5}$, dengan nilai permainan adalah $-\frac{2}{3}$. Sehingga kekalahan maksimum yang mungkin dialami oleh pemian A adalah $\frac{2}{5}$ dan kemenangan minimum pemain BC adalah $\frac{2}{5}$. Saat A dan BC memainkan strategi campuran optimum maka *pay off* yang didapat adalah $\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)(2, -1, -1) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)(-1, 0, 1) + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)(-2, 1, 1) + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)(0, 2, -2) = \left(-\frac{2}{25}, \frac{3}{25}, -\frac{1}{25}\right)$. Pemain A akan mengalami kekalahan sebesar $\frac{1}{25}$ sedangkan B akan mendapat kemenangan sebesar $\frac{3}{25}$.

Jika pemain A dan pemain B bergabung untuk melawan C, maka didapat matriks *pay off* untuk C sebagai berikut:

	A_1B_1	A_1B_2	A_2B_1	A_2B_2
C_1	−1	0	1	0
C_2	1	−1	−2	−1

Menggunakan metode grafik, kolom ketiga dihapus sehingga matriks *pay off* sebagai menjadi:

	A_1B_1	A_1B_2
C_1	−1	0
C_2	1	1

Matriks *Payoff* bagi Pemain C pada Contoh 3.6

Dengan menggunakan strategi campuran diperoleh $x = \frac{2}{3}$ dan $y = \frac{1}{3}$, dengan nilai permainan adalah $-\frac{1}{3}$. Sehingga kekalahan maksimin yang mungkin dialami pemain C adalah $\frac{1}{3}$ dan kekalahan minimum pemain AB adalah $\frac{2}{3}$. Saat C dan AB memainkan strategi campuran optimum maka *pay off* yang didapat adalah $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(2, -1, -1) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(0, 0, 0) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(0, 1, -1) = \left(\frac{1}{9}, 0, -\frac{1}{3}\right)$. Pemain A akan mendapat kemenangan sebesar $\frac{1}{9}$, sedangkan B tidak mengalami kekalahan maupun kemenangan. Berdasarkan perhitungan penggabungan pemain di atas dapat disimpulkan pemain A memilih bergabung dengan C, tetapi pemain B dan C lebih memilih tidak bergabung dengan pemain lain karena dengan menggunakan strategi pemain B dan pemain C akan mengalami kerugian.

3.4.3.2. Penggabungan Pemain Berjumlah Tak Nol

Dengan menggunakan Contoh 3.8 akan dilihat kemungkinan *pay off* yang di dapat masing-masing pemain jika melakukan penggabungan strategi. Jika matriks *pay off* untuk pemain A, B, dan C pada Contoh 3.8 ditulis secara terpisah maka diperoleh:

A_1	C_1	C_2
B_1	1	−1
B_2	0	2

A_2	C_1	C_2
B_1	0	1
B_2	2	9

Matriks *Pay off* Bagi Pemain A pada Contoh 3.8

A_1 C_1 C_2

B_1	2	1
B_2	1	0

A_2	C_1	C_2
B_1	3	−1
B_2	1	0

Matriks *Payoff* Bagi Pemain B pada Contoh 3.8

A_1	C_1	C_2
B_1	−1	0
B_2	1	0

A_2	C_1	C_2
B_1	1	2
B_2	0	1

Matriks *Pay off* Bagi Pemain C pada Contoh 3.8

Dilihat pada matriks *pay off* bagi pemain B, strategi C_2 mendominasi C_1, sehingga untuk penggabungan pemain B dan C diperoleh matriks *pay off* sebagai berikut:

	B_1C_1	B_2C_2
A_1	(−1, 1)	(2, 1)
A_2	(1, 1)	(0, 1)

Ekspektasi *pay off* bagi pemain A dan BC adalah:

$P_A = x[y + 2(1 - y)] + (1 - x)y$

$= -4xy + 2x + y$

$P_{BC} = x[y + (1 - y)] + (1 - x)[y + (1 - y)]$

$= x + (1 - x)$

$= 1$

Dengan menghitung turunan parsial P_A terhadap x didapat $y = \frac{1}{2}$, menghitung turunan parsial P_A terhadap y didapat $x = \frac{1}{4}$. Sehingga nilai $v(A) = = \frac{1}{2}$ dan $v(BC) = 1$. *Pay off* yang didapat masing-masing pemain jika pemain A dan B bergabung adalah $\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(-1, 1, 0) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(2, 0, 1) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1, -1, 2) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(0, 0, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$. Sehingga pemain A akan mendapat keuntungan sebesar $\frac{1}{2}$, B akan mengalami kerugian sebesar $\frac{1}{4}$, dan C akan mendapat keuntungan sebesar $\frac{5}{4}$.

Kemudian jika pemain A dan C yang bergabung maka akan diperoleh matriks *pay off* sebagai berikut:

	A_1C_2	A_2C_2
B_1	(1, −1)	(−1, 3)
B_2	(0, 3)	(0, 1)

Ekspektasi *pay off* bagi pemain B dan AC adalah :

$P_B = x[y(1 - y)] + (1 - x)[2y + (1 - y)]$

$= 2xy - x$

$P_{AC} = x[-y + 3(1 - y)] + (1 - x)[3y + (1 - y)]$

$= -6xy + 2x + 2y + 1$

Dengan menghitung turunan parsial P_B terhadap x didapat $y = \frac{1}{2}$, menghitung turunan parsial P_{AC} terhadap y didapat $x = \frac{1}{3}$. Sehingga nilai $v(B) = 0$ dan $v(AC) = \frac{5}{3}$. *Pay off* yang didapat masing-masing pemain jika pemain B dan C bergabung adalah $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(-1, 1, 0) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1, -1, 2) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(2, 0, 1) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(0, 0, 1) = \left(\frac{2}{3}, 0, 1\right)$. . Sehingga pemain B akan mendapat keuntungan sebesar $\frac{2}{3}$, B tidak mendapat keuntungan maupun kerugian, dan C mendapat keuntungan sebesar 1.

Sedangkan jika pemain A dan B yang bergabung maka diperoleh matriks *pay off* sebagai berikut:

	A_1B_1	A_1B_2	A_2B_1	A_2B_2
C_1	(−1, 3)	(0, 1)	(1, 3)	(0, 3)
C_2	(0, 0)	(1, 2)	(2, 0)	(1,0)

Karena strategi C_2 mendominasi strategi C_1, maka pemain C akan selalu memilih strategi 2. Sedangkan AB akan memilih strategi A_1B_2 karena dengan penggabungan strategi tersebut AB akan mendapat *pay off* optimum, dengan $v(C) = 1$ dan $v(AB) = 2$. *Pay off* yang didapat masing-masing pemain jika pemain B dan C bergabung adalah (2, 0, 1).

Berdasarkan perhitungan penggabungan di atas dapat disimpulkan pemain A mendapat keuntungan sebesar 2 jika bergabung dengan B, jika bergabung dengan C dan jika tidak bergabung dengan pemain lain. Pemian B mendapat *pay off* sebesar 0 jika bergabung dengan A, $-\frac{1}{4}$ jika bergabung dengan C, dan 0 jika tidak bergabung dengan pemain lain. Pemain C mendapat keuntungan sebesar $\frac{5}{4}$ jika bergabung dengan B, 1 jika bergabung dengan pemain A, dan 1 jika tidak bergabung dengan pemain lain. Sehingga dapat disimpulkan sendiri , jika bergabung dengan C maka A akan mengalami kerugian. Sedangkan pemain A dan C memilih untuk bergabung dengan B, tetapi kemungkinan yang paling mungkin adalah penggabungan antara pemain A dan B.