BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Integral merupakan salah satu cabang dari matematika yang banyak diaplikasikan pada bidang matematika lainnya maupun bidang ilmu yang lain. Pada tahun 1850 Bernhard Reimann untuk pertama kalinya memberikan definisi modern tentang integral tentu yang sekarang disebut dengan integral Riemann. Setelah itu penelitian tentang integral terus berlanjut.

Integral dibedakan menjadi dua jenis berdasarkan pendefinisiannya, yaitu secara konstruktif dan deskriptif (Praja, 2008). Integral Riemann adalah salah satu jenis integral yang didefinisikan secara konstruktif. Pendefinisian integral Riemann dimulai dengan pemartisian domain dari sebuah fungsi yang berbentuk interval menjadi subinterval-subinterval, kemudian ditentukan jumlah Riemann atas dan jumlah Riemann bawah fungsi tersebut. Selanjutnya, integral Riemann suatu fungsi dapat ditentukan jika nilai limit dari jumlah Riemann atas dan jumlah Riemann bawah bernilai sama. Himpunan semua fungsi yang terintegralkan Riemann dinotasikan dengan $\mathcal{R}$, lebih khusus himpunan semua fungsi yang terintegralkan Riemann pada interval $[a, b]$ dinotasikan dengan $\mathcal{R}[a, b]$.

Seiring dengan perkembangan teori integral, diketahui bahwa tidak semua fungsi dapat terintegralkan Riemann. Salah satu fungsi dasar yang tidak terintegralkan Riemann adalah fungsi Dirichlet. Pada tahun 1902 dalam tesisnya

Henri Lebesgue memperkenalkan suatu integral baru yang disebut dengan integral Lebesgue. Fungsi Dirichlet adalah salah satu fungsi yang terintegralkan Lebesgue.

Berbeda dengan integral Riemann yang memfokuskan pemartisian pada domain fungsi yang akan diintegralkan, integral Lebesgue lebih memfokuskan pemartisian pada range dari fungsi yang terukur Lebesgue. Selanjutnya dipilih sebuah nilai dari masing-masing partisi untuk merepresentasikan sebuah fungsi yang disebut dengan fungsi sederhana. Oleh karena itu sebuah fungsi yang terukur Lebesgue dapat didekati oleh barisan fungsi-fungsi sederhana. Dengan demikian, integral dari fungsi terukur Lebesgue tersebut didekati oleh integral dari fungsi-fungsi sederhana tersebut. Selanjutnya himpunan semua fungsi yang terintegralkan Lebesgue dinotasikan dengan L^1, lebih khusus himpunan semua fungsi yang terintegralkan Lebesgue pada suatu himpunan E yang terukur Lebesgue dinotasikan dengan $L^1(E)$.

Kajian-kajian mengenai teori integral difokuskan kepada bagaimana integral tersebut didefinisikan, sifat-sifat yang berlaku, dan perluasan dari definisi yang telah dirumuskan. Selain itu masalah yang sering dibahas adalah jika diberikan barisan fungsi yang terintegralkan, syarat apakah yang diperlukan agar barisan tersebut konvergan ke suatu limit fungsi yang juga terintegralkan.

Pada tulisan ini akan dikaji mengenai pengkonstruksian dari integral Lebesgue untuk fungsi terukur Lebesgue serta akan dibahas juga beberapa sifatnya. Kajian akan diawali dengan pendefinisian fungsi terukur Lebesgue dan pembahasan sifat-sifatnya. Selain itu, pada integral Riemann diketahui bahwa jika diberikan suatu barisan fungsi di $\mathcal{R}$ yang konvergen seragam maka limit fungsinya juga akan berada di $\mathcal{R}$. Pada tulisan ini akan diselidiki suatu kondisi yang harus dipenuhi agar barisan fungsi di L^1 yang konvergen mempunyai limit fungsi yang berada di L^1.

Sebagaimana diuraikan di atas terdapat fungsi yang terintegralkan Lebesgue tetapi tidak terintegralkan Riemann. Bagian akhir dari tulisan ini akan membahas keterkaitan antara fungsi di $\mathcal{R}[a,b]$ dengan fungsi di $L^1[a,b]$.

1.2 Rumusan dan Batasan Masalah

Dalam karya tulis ini akan dibahas mengenai sifat-sifat dari fungsi yang terukur Lebesgue. Selanjunya akan dikaji pengkonstruksian integral Lebesgue dan beberapa sifatnya. Selain itu, akan diselidiki kondisi yang harus dipenuhi agar suatu barisan fungsi di L^1 yang konvergen mempunyai limit fungsi di L^1 juga. Kemudian, akan dikaji keterkaitan antara fungsi di $\mathcal{R}$ dengan fungsi di L^1, apakah fungsi di $\mathcal{R}$ akan selalu berada di L^1 atau sebaliknya.

Secara ringkas rumusan masalah yang akan dikaji dalam karya tulis ini adalah:

a. Sifat-sifat apa saja yang berlaku pada fungsi terukur Lebesgue?
b. Bagaimana pengkonstruksian dari integral Lebesgue dan sifat-sifat dasar apa saja yang berlaku pada integral Lebesgue?
c. Kondisi apakah yang harus dipenuhi agar barisan fungsi yang konvergen pada L^1 memiliki limit juga pada L^1?
d. Bagaimana hubungan fungsi di $\mathcal{R}[a,b]$ dengan fungsi di $L^1[a,b]$?

Integral Lebesgue dapat didefinisikan untuk fungsi-fungsi terukur lainnya, selain fungsi terukur Lebesgue. Pada pambahasan karya tulis ini pendefinisian integral Lebesgue dibatasi untuk fungsi yang terukur Lebesgue.

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan karya tulis ini adalah untuk:

a. Mengetahui sifat-sifat yang berlaku pada fungsi terukur Lebesgue.
b. Mengetahui pengkonstruksian dari integral Lebesgue dan mengetahui sifat-sifat dasar yang berlaku pada integral Lebesgue.
c. Mengetahui kondisi yang harus dipenuhi agar barisan fungsi yang konvergen pada L^1 memiliki limit juga pada L^1.
d. Mengetahui hubungan fungsi di $\mathcal{R}[a,b]$ dengan fungsi di $L^1[a,b]$.

1.4 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan pada karya ilmiah ini, yaitu:

1. BAB I (Pendahuluan), adalah pengantar karya tulis ini. Pada BAB I dibahas mengenai latar belakang masalah, rumusan dan batasan masalah, tujuan masalah dan sistematika penulisan.
2. BAB II (Dasar Teori), pada bab ini dibahas teori-teori yang dapat mendukung dalam pembahasan Integral Lebesgue. Materi yang dibahas diantaranya adalah himpunan dan fungsi, sifat-sifat supremum dan infimum, barisan bilangan real dan barisan fungsi, barisan di perluasan bilangan real, integral Riemann dan teori ukuran Lebesgue.

3. BAB III (Fungsi Terukur Lebesgue), pada bab ini dibahas mengenai definisi fungsi yang terukur Lebesgue dan beberapa sifat dari fungsi tersebut. Dalam bab ini dikaji juga mengenai fungsi-fungsi khusus yang terukur Lebesgue.
4. BAB IV (Integral Lebesgue untuk Fungsi-fungsi Terukur Lebesgue), adalah pokok pembahasan mengenai pengkonstruksian integral Lebesgue dan sifat-sifat dasar dari integral Lebesgue. Dalam bab ini akan dibahas pendefinisian integral Lebesgue untuk fungsi karakteristik, fungsi sederhana, fungsi bernilai non negatif dan sebarang fungsi yang lebih umum beserta dengan sifat-sifatnya.
5. BAB V (kekonvergenan Barisan Pada L^1 dan keterkaitan L^1 dengan $\mathcal{R}$), adalah lanjutan dari pembahasan bab empat yang berisi teorema utama dalam karya tulis ini. Dalam bab ini akan dibahas mulai dari Teorema Kekonvergenan Monoton Lebesgue, Lemma Fatou, sampai Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue. Pada bab ini juga dibahas hubungan antara fungsi di $\mathcal{R}$ dengan fungsi di L^1.
6. BAB VI (Penutup), menyajikan kesimpulan dari keseluruhan karya tulis ini, dan saran penulis berikutnya yang berkaitan dengan integral Lebesgue.