BAB III

FUNGSI TERUKUR LEBESGUE

Setelah dibahas mengenai ukuran Lebesgue dan beberapa sifatnya pada Bab II, selanjutnya pada bab ini akan dipelajari gagasan mengenai fungsi terukur Lebesgue. Gagasan mengenai fungsi terukur Lebesgue ini berperan penting dalam teori integral Lebegue yang akan dikaji pada Bab IV. Hal ini dikarenakan pada kajian tersebut, integral akan didefinisikan untuk fungsi-fungsi yang terukur Lebesgue.

Sebagaimana telah dijelaskan pada bab sebelumnya, sebuah himpunan dikatakan terukur Lebesgue jika memenuhi Definisi 2.6.6, dan koleksi semua himpunan yang terukur Lebesgue akan dinotasikan dengan $\mathcal{M} = \mathcal{L}$. Adapun ukuran Lebesgue yang merupakan fungsi dari $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ ke $[0, \infty]$ akan dinotasikan dengan μ. Notasi-notasi ini akan digunakan seterusnya pada bab-bab selanjutnya.

Pembahasan Bab III ini akan dibagi kedalam tiga subbab. Pada subbab 3.1 akan dibahas mengenai definisi dari fungsi yang terukur Lebesgue, pada subbab 3.2 akan dikaji mengenai sifat-sifat dari fungsi terukur Lebesgue dan pada subbab 3.3 akan dibahas mengenai definisi fungsi-fungsi khusus, yang selanjutnya akan diperlihatkan bahwa fungsi-fungsi tersebut terukur Lebesgue.

3.1 Definisi dan Contoh Fungsi Terukur Lebesgue

Berikut ini akan dibahas mengenai definisi dari fungsi yang terukur Lebesgue (terukur-μ). Pada definisi tersebut sebuah fungsi akan didefinisikan pada E yang merupakan himpunan terukur Lebesgue ke perluasan himpunan bilangan real $[-\infty, \infty]$.

Definisi 3.1.1 (Fungsi Terukur Lebesgue)

Misalkan E adalah himpunan terukur Lebesgue (terukur-μ). Sebuah fungsi dari E ke $[-\infty, \infty]$ disebut terukur-μ jika untuk setiap bilangan real t, himpunan $f^{-1}([-\infty, t])$ adalah himpunan terukur-μ.

Salah satu contoh fungsi yang terukur-μ adalah fungsi signum. Fungsi ini banyak ditemui pada kajian kalkulus dan analisis real.

Contoh 3.1.2

Misalkan diberikan sebuah fungsi signum, yaitu sgn: $[-1,1] \to \mathbb{R}$ dengan,

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in (0,1] \\ 0 & \text{jika } x = 0 \\ -1 & \text{jika } x \in [-1,0). \end{cases}$$

Akan diperlihatkan bahwa fungsi $\operatorname{sgn}(x)$ terukur-μ. Diberikan sebarang bilangan real t, akan diperoleh $\{x{:}\operatorname{sgn}(x) \leq t\}$ adalah sebagai berikut,

$$\{x{:}\operatorname{sgn}(x) \leq t\} = \begin{cases} [-1,1] & \text{jika } t \geq 1 \\ \{0\} \cup (0,-1] & \text{jika } t < 1 \\ [-1,0) & \text{jika } t < 0 \\ \emptyset & \text{jika } t < -1 \end{cases}$$

Berdasarkan Teorema 2.6.10 himpunan $(0,1], \{0\}, [-1,0), [-1,1]$ dan $\emptyset$ semuanya terukur-μ untuk setiap bilangan real t, dengan demikian dapat disimpulkan bahwa fungsi signum adalah terukur$-\mu$.

3.2 Sifat-sifat Fungsi Terukur Lebesgue

Pada subbab ini akan dikaji mengenai sifat-sifat dari fungsi terukur-μ. Teorema berikut ini menyatakan bahwa kondisi agar sebuah fungsi terukur-μ, seperti yang disebutkan dalam Definisi 3.1.1 dapat digantikan dengan salah satu kondisi yang dinyatakan pada Teorema di bawah ini.

Teorema 3.2.1

Misalkan f adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada E yang merupakan himpunan terukur-μ ke $[-\infty,\infty]$. Pernyataan berikut ini adalah ekivalen:

(a) $\{x: f(x) > t\}$ adalah himpunan terukur-μ untuk setiap bilangan real t.

(b) $\{x: \ f(x) \geq t\}$ adalah himpunan terukur-μ untuk setiap bilangan real t.

(c) $\{x: f(x) < t\}$ adalah himpunan terukur-μ untuk setiap bilangan real t.

(d) $\{x: f(x) \leq t\}$ adalah himpunan terukur-μ untuk setiap bilangan real t.

Bukti.

Misalkan diberikan sebuah fungsi f yang didefinisikan pada E yang merupakan himpunan terukur-μ ke $[-\infty,\infty]$ dan ambil sebarang bilangan real t. Pertama asumsikan bahwa pernyataan (d) benar, yaitu $\{x: f(x) \leq t\}$ adalah himpunan terukur-μ. Perhatikan bahwa,

$$\{x: f(x) > t\} = E\backslash\{x: f(x) \leq t\}$$

berdasarkan Teorema 2.6.7 diketahui komplemen dari himpunan yang terukur-μ adalah terukur- μ maka $\{x: f(x) > t\}$ adalah himpunan terukur- μ.

Selanjutnya asumsikan bahwa pernyataan (a) benar, yaitu $\{x: f(x) > t\}$ adalah himpunan terukur-μ, akan ditunjukkan pernyataan (a) mengakibatkan pernyataan (b). Karena $\{x: f(x) > t\}$ adalah himpunan terukur- μ untuk setiap bilangan real t, maka himpunan $\{x: f(x) > t - \frac{1}{n}\}$ juga merupakan himpunan terukur- μ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tetapi,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) > t - \frac{1}{n}\} = \{x: f(x) \geq t\}$$

adalah himpunan terukur- μ sebab irisan terbilang dari himpunan terukur-μ adalah terukur- μ. Jadi, $\{x: f(x) \geq t\ \}$ adalah himpunan terukur-μ untuk setiap bilangan real t.

Selanjutnya misalkan pernyataan (b) berlaku, yaitu $\{x: f(x) \geq t\}$ adalah himpunan terukur- μ. Perhatikan bahwa,

$$\{x: f(x) < t\} = E \backslash \{x: f(x) \geq t\},$$

karena komplemen dari himpunan terukur- μ adalah terukur- μ, maka $\{x: f(x) < t\}$ adalah himpunan terukur-μ untuk setiap bilangan real t.

Terakhir, misalkan pernyataan (c) berlaku, yaitu $\{x: f(x) < t\}$ adalah himpunan terukur- μ, akan dibuktikan pernyataan (d) benar. Karena $\{x: f(x) < t\}$ adalah himpunan terukur- μ untuk setiap bilangan real t, maka himpunan $\{x: f(x) < t + \frac{1}{n}\}$ adalah terukur- μ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Namun,

$$\{x: f(x) \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) < t + \frac{1}{n}\}$$

adalah himpunan terukur- μ. Dengan demikian, $\{x: f(x) \leq t\}$ adalah himpunan terukur untuk setiap bilangan real t. Jadi dapat disimpulkan bahwa kondisi (d) mengakibatkan kondisi (a), kondisi (a) mengakibatkan kondisi (b), kondisi (b) mengakibatkan kondisi (c) dan kondisi (c) mengakibatkan kondisi (d). ■

Berdasarkan Definisi 3.1.1 dan Teorema 3.2.1 dapat disimpulkan bahwa sebuah fungsi f dikatakan terukur-μ jika domain dari fungsi tersebut terukur-μ dan jika f memenuhi salah satu kondisi pada Teorema 3.2.1.

Teorema berikut ini membahas kaitan antara suatu fungsi terukur-μ dengan prapeta dari himpunan buka di $\mathbb{R}$ pada fungsi tersebut.

Teorema 3.2.2

Jika $f: E \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terukur-μ dan V adalah himpunan buka di $\mathbb{R}$ maka $\{x: f(x) \in V\}$ adalah himpunan terukur-μ.

Bukti

Misalkan diberikan sebuah fungsi terukur-μ, yaitu $f: E \to \mathbb{R}$. Ambil sebarang himpunan buka V di $\mathbb{R}$, akan ditunjukkan bahwa $\{x: f(x) \in V\}$ adalah himpunan terukur-μ. Berdasarkan Teorema 2.1.5 sebarang himpunan buka di $\mathbb{R}$ dapat dinyatakan sebagai gabungan terbilang dari himpunan-himpunan buka yang saling lepas, akibatnya V dapat dinyatakan sebagai $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ di mana $I_k = (a_k, b_k)$ adalah interval-interval buka yang saling lepas. Perhatikan bahwa,

$$\{x: f(x) \in V\} = \left\{x: f(x) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x: f(x) \in I_k\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{x: f(x) > a_k\} \cap \{x: f(x) < b_k\})$$

Karena f adalah fungsi terukur-μ maka $\{x: f(x) > a_k\}$ dan $\{x: f(x) < b_k\}$ adalah himpunan terukur-μ untuk setiap bilangan real a_k dan b_k dengan $k = 1,2,3, \ldots$.

Hal ini mengakibatkan $\{x: f(x) \in V\}$ adalah himpunan terukur-μ, sebab gabungan terbilang dari himpunan-himpunan yang terukur- μ adalah terukur- μ. ■

Dengan menggunakan Definisi 3.1.1 dan Teorema 3.2.1 dapat dibuktikan bahwa fungsi mutlak dari sebuah fungsi terukur-μ adalah terukur-μ dan perkalian sebuah fungsi terukur-μ dengan sebarang konstanta real adalah terukur-μ. Untuk lebih jelasnya, sifat tersebut akan disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 3.2.3

Jika f adalah fungsi terukur-μ yang didefinisikan pada E, maka $|f|$ adalah fungsi terukur.

Bukti

Ambil sebarang bilangan real t. Diketahui f adalah sebuah fungsi terukur-μ, dengan demikian $\{x: f(x) < t\}$ adalah himpunan terukur-μ. Perhatikan bahwa, berdasarkan Teorema 3.2.1, himpunan $\{x: f(x) > -t\}$ juga merupakan himpunan terukur-μ. Dengan demikian, diperoleh

$$\{x: |f(x)| < t\} = \{x: -t < f(x) < t\} = \{x: f(x) < t\} \cap \{x: f(x) > -t\}$$

adalah himpunan terukur-μ. Jadi, $|f|$ adalah fungsi terukur-μ. ■

Beberapa teorema di bawah ini membahas sifat-sifat dari kombinasi fungsi-fungsi terukur-μ.

Teorema 3.2.4

Jika f adalah fungsi terukur-μ yang didefinisikan pada E, maka untuk sebarang konstanta c, $f+c$ dan cf adalah fungsi terukur-μ pada E.

Bukti

Misalkan f adalah sebarang fungsi terukur-μ pada E. Akan dibuktikan bahwa $f+c$ dan cf terukur-μ pada E untuk sebarang konstanta c. Ambil sebarang bilangan real t. Pertama akan diperlihatkan bahwa $f+c$ adalah fungsi terukur-μ. Karena f terukur-μ, maka $\{x: f(x) \leq t\}$ adalah himpunan terukur-μ, sehingga $\{x: f(x) \leq t-c\}$ juga himpunan terukur-μ untuk setiap bilangan real t dan konstanta c. Dengan kata lain, $\{x: f(x)+c \leq t\}$ adalah himpunan terukur-μ. Jadi, $f+c$ adalah fungsi terukur-μ pada E.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa cf terukur-μ. Terdapat tiga kemungkinan pemilihan dari konstanta real c, yaitu $c>0$, $c<0$ atau $c=0$. Jika $c>0$ maka $\{x: cf(x) \leq t\} = \{x: f(x) \leq \frac{t}{c}\}$ adalah himpunan terukur-μ sebab $\{x: f(x) \leq t\}$ adalah himpunan terukur-μ untuk setiap bilangan real t. Jika $c<0$ maka $\{x: cf(x) \geq t\} = \{x: f(x) \leq \frac{t}{c}\}$ adalah himpunan terukur-μ sebab $\{x: f(x) \leq t\}$ adalah himpunan terukur-μ untuk setiap bilangna real t. Selanjutnya, jika $c=0$ maka $cf(x)=0$ adalah fungsi terukur-μ. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa cf adalah fungsi terukur-μ untuk sebarang konstanta real c. ■

Teorema berikut ini menyatakan bahwa komposisi fungsi yang kontinu dengan fungsi yang terukur-μ adalah terukur-μ, dan penambahan dan perkalian dari dua buah fungsi terukur-μ adalah terukur-μ.

Teorema 3.2.5

Misalkan E adalah sebuah himpunan terukur-μ dan misalkan $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu. Jika $f: E \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terukur-μ, dan jika $h = g \circ f$, maka $h: E \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terukur-μ.

Bukti

Misalkan E adalah sebarang himpunan terukur-μ dengan $f: E \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terukur-μ dan $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah sebuah fungsi kontinu, akan diperlihatkan bahwa $h: E \to \mathbb{R}$ di mana $h = g \circ f$ adalah fungsi terukur-μ. Ambil sebarang himpunan buka V di $\mathbb{R}$. Karena g adalah fungsi kontinu maka $g^{-1}(V)$ adalah buka di $\mathbb{R}$. Perhatikan bahwa,

$$h^{-1}(V) = (g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$$

karena f adalah fungsi terukur- μ maka $f^{-1}(g^{-1}(V))$ adalah himpunan terukur- μ di E, dengan demikian h adalah sebuah fungsi terukur- μ. ■

Teorema di bawah ini digunakan untuk memperlihatkan bahwa perkalian dan penjumlahan dua buah fungsi terukur-μ adalah terukur-μ.

Teorema 3.2.6

Misalkan u dan v adalah fungsi terukur-μ bernilai real yang didefinisikan pada E, misalkan Φ adalah sebuah fungsi kontinu pada $\mathbb{R}^2$, dan definisikan,

$$h(x) = \Phi(u(x), v(x))$$

untuk $x \in E$. Maka h adalah terukur-μ.

Bukti

Misalkan u dan v adalah sebarang fungsi terukur-μ bernilai real dan sebuah fungsi kontinu Φ dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}$. Akan diperlihatkan fungsi $h: E \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$ untuk $x \in E$ adalah fungsi terukur-μ. Definisikan fungsi $f: E \to \mathbb{R}^2$ dengan $f(x) = (u(x), v(x))$ untuk $x \in E$. Perhatikan bahwa $h = \Phi \circ f$, sehingga berdasarkan Teorema 3.2.5 cukup ditunjukkan bahwa f adalah fungsi terukur-μ. Ambil sebarang himpunan buka V pada $\mathbb{R}^2$. Jika R adalah persegi empat buka pada bidang dengan sisi-sisi yang sejajar dengan sumbu-sumbu pada bidang, maka R adalah hasil kali kartesius dari dua buah interval buka I_1 dan I_2. Selanjutnya, perhatikan himpunan

$$f^{-1}(R) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2),$$

karena u dan v adalah fungsi terukur-μ maka $u^{-1}(I_1)$ dan $v^{-1}(I_2)$ adalah himpunan terukur-μ, sehingga $f^{-1}(R)$ adalah himpunan terukur-μ, sebab irisan terbilang dari himpunan terukur-μ adalah terukur-μ. Diketahui bahwa setiap himpunan buka V pada bidang dapat dinyatakan sebagai suatu gabungan terbilang dari persegi empat R_i, dengan demikian

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(R_i).$$

Karena $f^{-1}(R_i)$ adalah himpunan terukur-μ untuk setiap $i = 1,2,3, \dots,$ maka $f^{-1}(V)$ adalah himpunan terukur-μ. Dengan kata lain, f adalah fungsi terukur-μ dan berdasarkan Teorema 3.2.5, $h = \Phi \circ f$ adalah fungsi terukur-μ. ■

Akibat 3.2.7

Jika f dan g adalah fungsi terukur bernilai real pada E maka $f + g$ dan fg adalah fungsi terukur-μ pada E.

Bukti

Misalkan diberikan fungsi terukur bernilai real f dan g pada E. Misalkan Φ adalah sebuah fungsi kontinu dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh,

$$h_1(x) = \Phi\big(f(x), g(x)\big) = f(x) + g(x)$$

dan

$$h_2(x) = \Phi\big(f(x), g(x)\big) = f(x)g(x)$$

untuk $x \in E$. Dengan menggunakan Teorema 3.2.5 dapat disimpulkan bahwa $h_1 = f + g$ dan $h_2 = fg$ adalah fungsi terukur-μ pada E. ■

Pada Teorema selanjutnya akan diperlihatkan bahwa fungsi konstan dan fungsi kontinu termasuk ke dalam kelas fungsi terukur-μ asalkan domainnya adalah himpunan terukur-μ.

Teorema 3.2.8

Jika f adalah sebuah fungsi konstan yang didefinisikan pada E, di mana E himpunan terukur-μ, maka f adalah fungsi terukur-μ.

Bukti

Misalkan $f(x) = k$ untuk setiap $x \in E$, dengan k adalah suatu konstanta real. Ambil sebarang bilangan real t. Jika $t \geq k$ akan diperoleh $\{x: f(x) \leq t\} = \{x: f(x) = t\} \cup \{x: f(x) \leq t\} \backslash \{x: f(x) = k\} = E \cup \emptyset = E$ yang merupakan himpunan terukur-μ. Dengan kata lain, $\{x: f(x) \leq t\}$ adalah himpunan terukur-μ untuk setiap bilangan real $t \geq k$. Selanjutnya, jika $t < k$ maka didapat $\{x: f(x) \leq t\} = \emptyset$ adalah himpunan terukur-μ, dengan demikian $\{x: f(x) \leq t\}$ juga himpunan terukur-μ untuk setiap bilangan real $t < k$. Karena t sebarang, dapat disimpulkan bahwa fungsi konstan f adalah fungsi terukur-μ. ■

Berikut ini adalah teorema yang membahas kaitan antara kekontinuan dan keterukuran suatu fungsi.

Teorema 3.2.9

Jika f adalah sebuah fungsi kontinu bernilai real pada E, dengan E adalah himpunan terukur-μ, maka f adalah fungsi terukur-μ pada E.

Bukti

Misalkan diberikan sebarang fungsi kontinu f pada E. Akan ditunjukkan bahwa f adalah fungsi terukur-μ. Ambil sebarang himpunan buka V di $\mathbb{R}$. Karena V adalah himpunan terbuka dan f adalah fungsi kontinu maka $f^{-1}(V)$ haruslah merupakan himpunan buka. Namun, berdasarkan Teorema 2.6.10 himpunan buka adalah himpunan terukur-μ, dengan demikian dapat disimpulkan bahwa fungsi f terukur-μ. ■

Berikut ini adalah sifat-sifat dari fungsi terukur-μ yang berkenaan dengan barisan fungsi.

Teorema 3.2.10

Jika $f_n: E \to [-\infty, \infty]$ adalah fungsi terukur-μ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka fungsi-fungsi berikut ini adalah terukur-μ.

(a) $\sup_{n\geq 1} f_n$

(b) $\inf_{n\geq 1} f_n$

(c) $\lim\ \sup_{n\to\infty} f_n$

(d) $\lim\ \inf_{n\to\infty} f_n$

(e) $\lim_{n\to\infty} f_n$, *jika limit ini ada.*

Bukti.

Misalkan diberikan sebuah barisan fungsi (f_n) dengan $f_n: E \to [-\infty, \infty]$ dan f_n terukur-μ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, akan diperlihatkan bahwa masing-masing fungsi yang telah disebutkan di atas adalah fungsi terukur-μ.

Untuk membuktikan bagian (a) misalkan $g = \sup_{n\geq 1} f_n$ dan ambil sebarang bilangan real t. Perhatikan bahwa $g^{-1}\big((t,\infty]\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((t,\infty])$, karena f_n adalah fungsi terukur-μ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $g^{-1}((t,\infty])$ merupakan gabungan terbilang dari himpunan-himpunan terukur-μ, dengan demikian $g^{-1}((t,\infty])$ adalah himpunan terukur-μ. Dengan kata lain, g adalah fungsi terukur-μ.

Selanjutnya akan dibuktikan bagian (b). Misalkan $h = \inf_{n\geq 1} f_n$, dan ambil sebarang bilangan real t akan diperlihatkan bahwa $h^{-1}([-\infty, t))$ adalah himpunan terukur-μ. Perhatikan bahwa, $h^{-1}([-\infty, t)) = \cup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-\infty, t))$ di mana $f_n^{-1}([-\infty, t))$ adalah himpunan terukur-μ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa h adalah fungsi terukur-μ.

Untuk menunjukkan bagian (c) misalkan,

$$g_k = \sup\{f_k, f_{k+1}, f_{k+1}, \ldots\} \text{ dengan } k = 1,2,3, \ldots$$

dan

$$\phi = \inf\{g_1, g_2, g_3, \ldots\}.$$

Berdasarkan bagian (a), g_k adalah fungsi terukur-μ untuk $k = 1,2,3, \ldots$ dan dengan demikian, berdasarkan bagian (b) fungsi ϕ adalah terukur-μ. Dengan kata lain, $\phi = \lim\ \sup_{n\to\infty} f_n$ adalah fungsi terukur-μ.

Selanjutnya akan diperlihatkan bagian (d). Misalkan,

$$h_k = \inf\{f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots\} \text{ dengan } k = 1,2,3, \ldots$$

dan

$$\varphi = \sup\{h_1, h_2, h_3, \ldots\}.$$

Dengan menggunakan argumen yang serupa dengan pembuktian bagian (c), dapat disimpulkan bahwa fungsi φ adalah terukur-μ. Akan tetapi, diketahui bahwa $\varphi = \lim\ \inf_{n\to\infty} f_n$.

Terakhir untuk membuktikan bagian (e), asumsikan bahwa limit titik demi titik dari barisan fungsi (f_n) ada untuk setiap $x \in X$. Karena telah diasumsikan $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ada, akibatnya diperoleh $\lim\ \sup_{n\to\infty} f_n = f = \lim\ \inf_{n\to\infty} f_n$ dan berdasarkan bagian (c) dan (e) dapat disimpulkan bahwa $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ adalah fungsi terukur-μ. ■

3.3 Fungsi-fungsi Khusus dan Sifat-sifatnya

Integral Lebesgue untuk sebuah fungsi terukur-μ dapat didekati dengan menggunakan fungsi-fungsi sederhana, oleh sebab itu pada subbab ini akan didefinisikan fungsi sederhana dan beberapa fungsi khusus lainnya untuk membantu dalam memahami pengkonstruksian integral Lebesgue.

Definisi 3.3.1 (Fungsi Karakteristik)

Misalkan E adalah sebuah himpunan terukur-μ dan $A \subseteq E$. Fungsi karakteristik untuk himpunan A yaitu $\chi_A: E \to \{0,1\}$ didefinisikan dengan,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \; jika \; x \in A \\ 0 \; jika \; x \notin A. \end{cases}$$

Fungsi Dirichlet adalah salah satu contoh dari fungsi karakteristik untuk bilangan rasional $\mathbb{Q}$. Fungsi ini merupakan salah satu fungsi yang tidak terintegralkan Riemann, namun pada pembahasan selanjutnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi Dirichlet ini terintegralkan Lebesgue.

Contoh 3.3.2

Sebagaimana diketahui $\mathbb{R}$ adalah himpunan terukur-μ dan $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Diberikan fungsi Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \to \{0,1\}$, yang didefinisikan oleh

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jika } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

berdasarkan Definisi 3.3.1, $\chi_{\mathbb{Q}}$ adalah sebuah fungsi karakteristik dari himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$.

Fungsi karakteristik χ_A pada himpunan A merupakan salah satu kelas fungsi terukur-μ jika dan hanya jikan himpunan A adalah himpunan terukur-μ, seperti yang disebutkan dalam teorema berikut.

Teorema 3.3.3

Misalkan E adalah sebuah himpunan terukur-μ. Fungsi karakteristik χ_A dari himpunan $A \subseteq E$, adalah terukur-μ jika dan hanya jika A himpunan terukur-μ.

Bukti

Misalkan χ_A adalah fungsi terukur-μ akan diperlihatkan bahwa A adalah himpunan terukur-μ. Misalkan diberikan sebarang bilangan real t, terdapat dua kemungkinan pemilihan nilai t, yaitu $t \geq 1$ atau $t < 1$. Jika $t \geq 1$ maka diperoleh

$$A = \chi_A^{-1}((-\infty, t]) = \chi_A^{-1}(\{1\} \cup (-\infty, t]\backslash\{1\})$$

adalah himpunan terukur-μ. Selanjutnya jika $t < 1$ maka didapatkan

$$\emptyset = \chi_A^{-1}\big((-\infty, t]\big)$$

yang merupakan himpunan terukur-μ. Jadi, jika χ_A adalah fungsi terukur-μ maka A adalah himpunan terukur-μ.

Berikutnya misalkan diberikan $A \subseteq E$ dan sebarang bilangan real t, maka dapat dituliskan nilai t sebagai salah satu dari $t < 0$, atau $0 \leq t < 1$, atau $t \geq 1$. Jika $t < 0$ maka akan diperoleh $\chi_A^{-1}((-\infty, t]) = \emptyset$, karena χ_A hanya bernilai 1 atau 0. Jika $0 \leq t < 1$ akan diperoleh $\chi_A^{-1}((-\infty, t]) = \chi_A^{-1}(\{0\} \cup (-\infty, t] \backslash \{0\}) = A^c \cup \emptyset = A^c$. Jika $t \geq 1$ akibatnya $\chi_A^{-1}\big((-\infty, t]\big) = \chi_A^{-1}(\{1\} \cup (-\infty, t] \backslash \{1\} = A \cup \emptyset = A$. Dengan demikian diperoleh $\chi_A^{-1}((-\infty, t])$ adalah salah satu dari himpunan $\emptyset$, atau A^c, atau A. Jadi jika A himpunan terukur-μ, maka fungsi karakteristik χ_A adalah sebuah fungsi terukur-μ. ■

Selanjutnya akan dibahas mengenai fungsi sederhana. Fungsi sederhana adalah suatu fungsi yang mempunyai berhingga buah nilai yang berbeda. Berikut ini adalah definisi lengkap dari fungsi sederhana.

Definisi 3.3.4 (Fungsi Sederhana)

Misalkan E adalah sebuah himpunan terukur-μ, A_k dengan $k = 1,2,3, \dots, m$ adalah subset-subset dari E yang saling lepas dengan $\bigcup_{k=1}^{m} A_k = E$ dan misalkan α_k adalah berhingga banyak bilangan real yang berbeda. Sebuah fungsi sederhana $s: E \to (-\infty, \infty)$ didefinisikan sebagai

$$s := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}.$$

Jika nilai α_k dibatasi menjadi $0 \leq \alpha_k < \infty$ maka fungsi sederhana yang telah didefinisikan sebelumnya disebut fungsi sederhana non negatif. Dapat dilihat juga berdasarkan Definisi 3.2.4, setiap fungsi sederhana adalah sebuah kombinasi linear berhingga dari fungsi karakteristik. Perhatikan bahwa sebarang fungsi yang didefinisikan pada himpunan terukur-μ, misalkan E, yang hanya mempunyai berhingga banyak nilai yang berbeda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ dapat selalu dituliskan sebagai fungsi sederhana $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ di mana $A_i = \{x \in A: f(x) = \alpha_i\}$ dan $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$.

Salah satu contoh dari fungsi sederhana adalah fungsi tangga, namun tidak setiap fungsi sederhana adalah fungsi tangga. Berikut ini adalah contoh yang memperlihatkan bahwa fungsi tangga adalah kasus khusus dari fungsi sederhana, yaitu ketika himpunan $A_i = \{x \in A: f(x) = \alpha_i\}$ merupakan sebuah interval.

Contoh 3.3.5

Misalkan diberikan interval tertutup dan terbatas $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Untuk $j = 1,2,3, \dots, n$, misalkan $I_j = [x_{j-1}, x_j)$ sedemikian sehingga $\bigcup_{j=1}^{n} I_j = [a, b]$ dan misalkan juga c_j adalah suatu bilangan real nonnegatif. Jika χ_{I_j} adalah fungsi karakteristik untuk masing-masing interval I_j maka hasil jumlah

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{I_j}(x)$$

adalah sebuah fungsi tangga yang juga merupakan fungsi sederhana karena masing-masing subinterval I_j adalah terukur. Selanjutnya ambil dua buah interval [0,1] dan (1,2], jika

$$s(x) = 2\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) + 3\chi_{\mathbb{Q}\cap(1,2]}(x)$$

maka s adalah sebuah fungsi sederhana sebab interval [0,1] dan (1,2] terukur-μ dan s hanya memiliki berhingga buah nilai yang berbeda, namun s bukan merupakan fungsi tangga.

Teorema berikut menyatakan bahwa sebuah fungsi sederhana seperti pada Definisi 3.3.4 adalah terukur jika dan hanya jika masing-masing himpunan A_k dengan $k = 1,2,3, \dots, m$ adalah himpunan terukur-μ.

Teorema 3.3.7

Misalkan s adalah sebuah fungsi sederhana yang didefinisikan pada himpunan terukur E, dalam bentuk $s \coloneqq \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$. Fungsi sederhana s adalah terukur-μ jika dan hanya jika masing-masing himpunan A_k dengan $k = 1,2,3, \dots, m$ adalah himpunan terukur-μ.

Bukti

Pertama misalkan s adalah fungsi terukur, akan diperlihatkan bahwa A_k adalah himpunan terukur-μ untuk setiap $k = 1,2,3, \dots, m$. Ambil sebarang bilangan real t.

Kasus I ($a_k \geq 0$):

Diberikan $k = 1,2,3, \dots, m$ akan terdapat k sedemikian sehingga salah satu berlaku, $t < 0$ atau, $0 \leq t \leq a_k$ atau $t \geq a_k$. Dengan demikian akan diperoleh $s^{-1}([-\infty, t])$ yang merupakan himpunan terukur-μ adalah salah satu dari himpunan $\emptyset$, A_k^c atau A_k. Dengan demikian $\emptyset$, A_k^c atau A_k adalah himpunan terukur-μ.

Kasus II (jika $a_k < 0$):

Diberikan $k = 1,2,3, \dots, m$ akan terdapat k sedemikian sehingga salah satu berlaku $t > 0$ atau, $a_k \leq t < 0$ atau $t < a_k$. Jika $t > 0$ maka $s^{-1}([-\infty, t]) = s^{-1}(\{a_k\} \cup \{0\} \cup [-\infty, t]\{a_k, 0\}) = A_k \cup A_k^c = E$ adalah himpunan terukur-μ.

Sedangkan jika $a_k \leq t < 0$ akan diperoleh $s^{-1} = ([-\infty, t]) = s^{-1}(\{a_k\} \cup [-\infty, t] \backslash \{a_k\}) = A_k$ adalah himpunan terukur-μ. Dan, jika $t < a_k$ akibatnya $s^{-1} = ([-\infty, t]) = \emptyset$ merupakan himpunan terukur-μ.

Karena t adalah sebarang bilangan real, dapat disimpulkan bahwa A_k adalah himpunan terukur-μ untuk setiap $k = 1,2,3, \dots, m$.

Selanjutnya asumsikan bahwa A_k adalah himpunan terukur-μ untuk setiap $k = 1,2,3, \dots, m$. Akan dibuktikan bahwa s adalah sebuah fungsi terukur-μ. Misalkan $\alpha_k \in (-\infty, \infty)$ dan tanpa mengurangi keumuman asumsikan bahwa $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$. Dengan demikian akan terdapat k sedemikian sehingga salah satu berlaku: $-\infty < t < \alpha_1$ atau, $\alpha_k \leq t < \alpha_{k+1}$ atau $t \geq \alpha_m$. Perhatikan kasus-kasus beriktu ini:

Jika $-\infty < t < \alpha_1$ maka $s^{-1}([-\infty, t]) = \emptyset$ adalah himpunan terukurμ;

Jika $\alpha_1 \leq t < \alpha_2$ maka $s^{-1}([-\infty, t]) = (\{\alpha_1\} \cup [-\infty, t] \backslash \{\alpha_1\}) = A_1$ merupakan himpunan terukur-μ;

Jika $\alpha_2 \leq t < \alpha_3$ maka $s^{-1}([-\infty, t]) = (\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup [-\infty, t] \backslash \{\alpha_1, \alpha_2\}) = A_1 \cup A_2$ adalah himpunan terukur-μ;

Jika $\alpha_k \leq t < \alpha_{k+1}$ maka $s^{-1}([-\infty, t]) = \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k$ adalah himpunan terukur-μ, sebab gabungan terbilang dari himpunan terukur-μ adalah terukur-μ;

Jika $t \geq \alpha_m$ maka

$s^{-1}([-\infty, t]) = (\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \cup [-\infty, t] \backslash \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}) \bigcup_{k=1}^{m} A_k = E$ adalah himpunan terukur-μ.

Karena t adalah sebarang dapat disimpulkan bahwa $s^{-1}([-\infty, t])$ adalah himpunan terukur-μ untuk setiap bilangan real t. Jadi, s adalah sebuah fungsi terukur-μ. ■

Pada teorema berikut ini akan ditunjukkan keberadaan dari barisan fungsi sederhana yang monoton naik dan konvergen ke sebuah fungsi terukur-μ.

Teorema 3.3.7

Misalkan $f: E \to [0, \infty]$ adalah sebuah fungsi terukur-μ. Terdapat barisan fungsi sederhana (s_n) yang terukur-μ pada E sedemikian sehingga

(a) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$,

(b) $(s_n(x)) \to f(x)$ ketika $n \to \infty$, untuk setiap $x \in E$.

Bukti

Misalkan diberikan sebuah fungsi terukur $f: E \to [0, \infty]$, akan ditunjukkan bahwa terdapat barisan dari fungsi-fungsi sederhana yang memenuhi kondisi di atas. Untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $1 \leq i \leq n2^n$, partisikan $[0, \infty]$ ke dalam subinterval-subinterval yang tidak saling tumpang tindih $I_{n,i}$ oleh

$$I_{n,i} = \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right).$$

Kemudian definisikan juga

$$E_{n,i} = f^{-1}([\tfrac{i-1}{2^n}, \tfrac{i}{2^n})) \text{ dan } F_n = f^{-1}\big([n, \infty)\big).$$

Definisikan fungsi sederhana s_n pada E dengan

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{n,i} + n\chi_{F_n}$$

sehingga s_n adalah fungsi sederhana yang terukur-μ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, karena $E_{n,i}$ dan F_n masing-masing adalah himpunan terukur-μ. Sekarang ambil sebarang $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n \leq m$, perhatikan bahwa,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{n,i} + n\chi_{F_n} \leq \sum_{i=1}^{m2^m} \frac{i-1}{2^m} \chi_{m,i} + m\chi_{F_m} = s_m$$

dengan demikian (s_n) monoton naik. Selanjutnya akan dibuktikan bagian (b). Jika $f(x) < \infty$ (dengan kata lain f terbatas), yaitu misalkan $f(x) \leq K$ di mana K adalah konstanta real positif. Karena $f(x) \leq K$, terdapat bilangan asli terkecil n_0 di mana $K < n_0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in E$ berlaku

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n_0 2^{n_0}} E_{n_0,i}$$

maka untuk setiap $x \in E$ dan $n \in \mathbb{N}$ di mana $n \geq n_0$, terdapat $i \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \Leftrightarrow 0 \leq f(x) - \frac{i-1}{2^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Misalkan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|f(x) - s_n(x)| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq n_1 \geq n_0$ dan untuk setiap $x \in E$. Jika $f(x) = \infty$, maka definisikan $s_n(x) = n$, sehingga $\lim_{n\to\infty}\big(s_n(x)\big) = \infty$. ■

Teorema 3.3.6 menyatakan bahwa sebarang fungsi terukur-μ dapat didekati oleh barisan fungsi-fungsi sederhana yang terukur-μ

Berikut ini akan didefinisikan bagian positif dan bagian negatif dari sebuah fungsi. Bagian positif dan bagian negatif ini diperlukan dalam mendefinisikan integral Lebesgue untuk fungsi umum yang terukur-μ.

Definisi 3.3.7

Misalkan E adalah sebuah himpunan terukur-μ dan misalkan diberikan sebarang fungsi $f: E \to [-\infty, \infty]$. Bagian positif f_+ dari fungsi f didefinisikan sebagai,

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jika } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{jika } f(x) < 0 \end{cases}$$

dan bagian negatif f_- dari fungsi f didefinisikan sebagai,

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{jika } f(x) < 0 \\ 0 & \text{jika } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa bagian positif dan bagian negatif dari sebuah fungsi terukur-μ adalah terukur-μ, seperti yang disajikan pada teorema berikut.

Teorema 3.3.8

Misalkan E adalah sebuah himpunan terukur-μ. Jika $f: E \to [-\infty, \infty]$ adalah sebuah fungsi terukur-μ, maka f_+ dan f_- adalah fungsi terukur-μ.

Bukti.

Misalkan f adalah sebarang fungsi terukur-μ yang didefinisikan pada E, akan ditunjukkan bahwa f_+ dan f_- adalah fungsi terukur-μ. Berdasarkan definisi dari

f_+ dan f_-, bagian positif dan bagian negatif dari fungsi f dapat dituliskan secara berturut-turut sebagai,

$$f_+(x) = \text{maks } \{f(x), 0\}$$

dan

$$f_-(x) = -\text{min } \{f(x), 0\}.$$

Karena f terukur-μ, maka berdasarkan Teorema 3.2.10 fungsi f_+ dan f_- adalah terukur-μ. ■

Dapat dilihat bahwa baik f_+ maupun f_- bernilai non negatif dan dapat dituliskan bahwa,

$$f = f_+ - f_-$$

$$|f| = f_+ + f_-.$$