BAB III
ECONOMIC ORDER QUANTITY MULTIITEM DENGAN MEMPERTIMBANGKAN WAKTU KADALUARSA DAN FAKTOR DISKON

3.1 *Economic Order Quantity*

Economic Order Quantity (EOQ) merupakan suatu metode yang digunakan untuk mengendalikan persediaan barang. Wikipedia (2011) mengemukakan bahwa *Economic Order Quantity* merupakan metode tingkat persediaan yang meminimumkan biaya total penyimpanan persediaan dan biaya pemesanan. EOQ dikenal juga dengan model EOQ Wilson. EOQ merupakan suatu metode yang digunakan untuk mengoptimalkan kuantitas pesanan barang dalam rangka memperoleh keuntungan yang sebesar-besarnya. Dengan mengoptimalkan kuantitas barang yang akan dipesan, maka biaya-biaya yang terkait dengan persediaan dapat ditekan serendah mungkin. EOQ dapat dipakai sebagai dasar pengambilan keputusan dalam masalah *inventory* dan merupakan metode yang paling sering digunakan karena bentuknya sederhana sehingga mudah untuk dikembangkan dan diaplikasikan dalam berbagai macam kasus.

Tujuan utama penggunaan metode EOQ adalah untuk meminimumkan total biaya persediaan yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} TIC(Q) &= TB+TP+TS \\ &= BD + P\frac{D}{Q} + S\frac{Q}{2} \qquad \ldots(7) \end{aligned}$$

Persamaan (7) merupakan sebuah fungsi total biaya persediaan yang bergantung pada satu variabel yaitu Q. Untuk memperoleh nilai Q yang optimal dengan tujuan meminimumkan total biaya persediaan, persamaan (7) harus didiferensialkan terhadap Q kemudian dibuat sama dengan nol sehingga diperoleh nilai Q optimal yang dinotasikan dengan Q^*.

$$\frac{dTIC(Q)}{dQ} = 0$$

$$\frac{d(TB + TP + TS)}{dQ} = 0$$

$$\frac{d\left(BD + P\frac{D}{Q} + S\frac{Q}{2}\right)}{dQ} = 0$$

$$0 + \left(-\frac{PD}{(Q^*)^2}\right) + \frac{S}{2} = 0$$

$$\frac{S}{2} - \frac{PD}{(Q^*)^2} = 0$$

$$\frac{S}{2} = \frac{PD}{(Q^*)^2}$$

$$S(Q^*)^2 = 2PD$$

$$(Q^*)^2 = \frac{2PD}{S}$$

$$\sqrt{(Q^*)^2} = \sqrt{\frac{2PD}{S}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2PD}{S}} \qquad \ldots(8)$$

Biaya pemesanan tidak naik bila kuantitas pesanan berubah, namun bila *item* yang dipesan setiap kali pemesanan kuantitasnya semakin banyak maka total biaya pemesanan akan turun. Biaya penyimpanan merupakan perkalian antara rata-rata persediaan yaitu $\frac{Q}{2}$ dengan biaya simpan per unit.

Melalui kurva total biaya persediaan pada Gambar 3., diketahui bahwa nilai Q^* berada pada titik potong antara kurva total biaya pemesanan dengan kurva total biaya penyimpanan. Oleh karena itu, Q^* juga dapat diperoleh melalui perumusan berikut:

$$TP = TS$$

$$\frac{PD}{Q} = \frac{SQ}{2}$$

$$2PD = S(Q^*)^2$$

$$(Q^*)^2 = \frac{2PD}{S}$$

$$\sqrt{(Q^*)^2} = \sqrt{\frac{2PD}{S}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2PD}{S}} \qquad \ldots(9)$$

Setelah memperoleh Q^*, yaitu ukuran pemesanan yang dapat meminimumkan total biaya persediaan, kemudian nilai Q^* tersebut disubstitusikan ke persamaan (7) sehingga total biaya persediaan yang minimum dalam suatu horizon waktu perencanaan dapat dinyatakan sebagai sebuah fungsi yang bergantung pada nilai Q^*.

$$TIC(Q^*) = TB + TP + TS$$

$$= BD + P\frac{D}{Q^*} + S\frac{Q^*}{2}$$

$$= BD + P\frac{D}{\sqrt{\frac{2PD}{S}}} + S\frac{\sqrt{\frac{2PD}{S}}}{2}$$

$$= \frac{BD\ 2\sqrt{\frac{2PD}{S}} + 2PD + S\frac{2PD}{S}}{2\sqrt{\frac{2PD}{S}}}$$

$$= \frac{2\left(BD\sqrt{\frac{2PD}{S}} + PD + PD\right)}{2\sqrt{\frac{2PD}{S}}}$$

$$= \frac{BD\sqrt{\frac{2PD}{S}} + 2PD}{\sqrt{\frac{2PD}{S}}}$$

$$= \frac{BD\sqrt{\frac{2PD}{S}} + 2PD}{\sqrt{\frac{2PD}{S}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2PD}{S}}}{\sqrt{\frac{2PD}{S}}}$$

$$= \frac{BD\frac{2PD}{S} + 2PD\sqrt{\frac{2PD}{S}}}{\frac{2PD}{S}}$$

$$= 2PD\left(\frac{BD}{S} + \sqrt{\frac{2PD}{S}}\right)\frac{S}{2PD}$$

$$TIC(Q^*) = BD + \sqrt{2PDS} \qquad \ldots(10)$$

Dalam menggunakan metode EOQ klasik, yaitu EOQ sederhana tanpa pengembangan apapun, terdapat beberapa asumsi yang harus dipenuhi, yaitu :

1. Barang yang dipesan hanya satu *item*.
2. Kuantitas permintaan konstan dan diketahui.
3. Harga pembelian per unit diketahui dan konstan.
4. Pesanan diterima dengan segera (*instantaneous*) tanpa penundaan.
5. Tenggang waktu (*lead time*) konstan dan diketahui.
6. Tidak ada diskon yang diberikan oleh pihak *supplier*.
7. Biaya variabel yang diperhitungkan hanya biaya pembelian, biaya pemesanan, dan biaya penyimpanan.
8. Tidak terjadi *back order*.
9. Barang yang dipesan tidak memiliki waktu kadaluarsa.

Metode EOQ sering digunakan karena mampu memberikan solusi yang terbaik bagi perusahaan. EOQ tidak hanya menghasilkan kuantitas persediaan yang ekonomis, tetapi juga menyusun biaya minimum yang harus dikeluarkan perusahaan untuk mendanai persediaan. Berdasarkan karakteristik EOQ, penggunaan EOQ dalam pengendalian persediaan bahan baku akan membuat biaya persediaan perusahaan menjadi efisien.

Frekuensi pemesanan merupakan jumlah pemesanan yang dilakukan oleh perusahaan dalam satu horizon waktu perencanaan yang dirumuskan sebagai berikut:

$$F = \frac{D}{Q} \quad \text{sehingga} \quad F^{*} = \frac{D}{Q^{*}} \qquad \ldots(11)$$

F^* menotasikan frekuensi pemesanan yang optimal. Periode pemesanan merupakan waktu yang diperlukan untuk melakukan satu kali proses pemesanan dalam suatu horizon waktu perencanaan dan dirumuskan dengan:

$$T = \frac{Q}{D} \quad \text{sehingga} \quad T^* = \frac{Q^*}{D} \qquad \ldots(12)$$

T^* menotasikan periode pemesanan yang optimal.

3.2 *Economic Order Quantity* untuk Kasus *Multiitem*

EOQ *multiitem* merupakan metode EOQ untuk pembelian bersama (*joint purchase*) beberapa *item*. EOQ *multiitem* merupakan pengembangan dari model EOQ *single-item*. Asumsi dalam EOQ *multiitem* pada dasarnya sama dengan metode EOQ dasar (klasik) namun terdapat beberapa tambahan, yaitu:

1. Tingkat permintaan untuk setiap *item* diketahui dan konstan.
2. Waktu tunggu (*lead time*) untuk semua *item* adalah sama.
3. Harga pembelian per unit untuk setiap *item* diketahui dan konstan.
4. Biaya penyimpanan untuk setiap *item* diketahui.
5. Pemesanan dilakukan secara bersamaan untuk semua *item*.

Total biaya persediaan dalam EOQ *multiitem* mencakup total biaya pembelian, total biaya pemesanan, dan total biaya penyimpanan.

$$\begin{aligned} TIC(Q) &= TB + TP + TS \\ &= \sum_{i=1}^{n} B_i D_i + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{D_i}{Q_i} + \sum_{i=1}^{n} S_i \frac{Q_i}{2} \end{aligned} \qquad \ldots(13)$$

dengan i menunjukkan *item* ke-i (i = 1, 2 , ..., n).

Total biaya pemesanan per horizon waktu perencanaan merupakan perkalian antara biaya setiap pemesanan dengan frekuensi pemesanan yang dinotasikan dengan:

$$TP = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{D_i}{Q_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i F_i \qquad \ldots(14)$$

Tujuan EOQ *multiitem* adalah untuk mengurangi total biaya pemesanan. Memesan lebih dari satu *item* dalam satu kali proses pemesanan mengakibatkan frekuensi pemesanan untuk n *item* sama, yaitu sebesar F dan biaya satu kali proses pemesanan untuk n *item* juga sama, yaitu sebesar P. Akibatnya, total biaya pemesanan dalam EOQ untuk kasus *multiitem* menjadi:

$$TP = PF \qquad \ldots(15)$$

dan total biaya penyimpanan menjadi

$$TS = \sum_{i=1}^{n} S_i \frac{Q_i}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} S_i \frac{\frac{D_i}{F}}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} S_i \frac{D_i}{2F}$$

$$= \frac{1}{2F} \sum_{i=1}^{n} S_i D_i \qquad \ldots(16)$$

Akibatnya TIC dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathrm{TIC(F)} = \mathrm{TB} + \mathrm{TP} + \mathrm{TS}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} B_i D_i + PF + \frac{1}{2F} \sum_{i=1}^{n} S_i D_i \qquad \ldots(17)$$

Untuk mengurangi biaya pemesanan, frekuensi pemesanan harus ditekan seminimum mungkin, dengan syarat harus tetap dapat memenuhi kebutuhan konsumen. Frekuensi pemesanan yang minimum dapat diperoleh dengan cara mendiferensialkan persamaan (17) kemudian membuatnya sama dengan nol.

$$\frac{d\mathrm{TIC(F)}}{dF} = 0$$

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^{n} B_i D_i + PF + \frac{1}{2F} \sum_{i=1}^{n} S_i D_i\right)}{dF} = 0$$

$$\frac{d}{dF}\left(\sum_{i=1}^{n} B_i D_i + PF + \frac{1}{2F} \sum_{i=1}^{n} S_i D_i\right) = 0$$

$$0 + P + \left(-\frac{1}{2(F^*)^2} \sum_{i=1}^{n} S_i D_i\right) = 0$$

$$P = \frac{1}{2(F^*)^2} \sum_{i=1}^{n} S_i D_i$$

$$2(F^*)^2 P = \sum_{i=1}^{n} S_i D_i$$

$$(F^*)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{2P}$$

$$\sqrt{(F^*)^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{2P}}$$

$$F^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{2P}} \qquad \ldots(18)$$

Setelah mendapatkan nilai frekuensi optimal yang dinotasikan dengan F^*, kemudian substitusikan persamaan (18) ke persamaan (17) sehingga diperoleh total biaya persediaan yang minimum berdasarkan nilai F^*.

$$TIC(F^*) = \sum_{i=1}^{n} B_i D_i + PF + \frac{1}{2F}\sum_{i=1}^{n} S_i D_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} B_i D_i + P\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{2P}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{2P}}}\sum_{i=1}^{n} S_i D_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} B_i D_i + \sqrt{P^2\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{2P}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{\sqrt{4\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{2P}}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} B_i D_i + \sqrt{\frac{P}{2}\sum_{i=1}^{n} S_i D_i} + \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{\sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{P}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{P}}}{\sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{P}}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} B_i D_i + \sqrt{\frac{P}{2}\sum_{i=1}^{n} S_i D_i} + \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i D_i\sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{P}}}{\frac{2\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}{P}}$$

$$TIC(F^*) = \sum_{i=1}^{n} B_i D_i + \sqrt{\frac{P}{2}\sum_{i=1}^{n} S_i D_i} + \frac{\sqrt{2P\sum_{i=1}^{n} S_i D_i}}{2} \qquad \ldots(19)$$

3.3 *Economic Order Quantity* untuk *Perishable Product*

Model persediaan produk yang tidak tahan lama (*perishable product*) merupakan model persediaan yang perhitungan persediaannya tidak hanya bergantung pada kuantitas permintaan tetapi juga pada tingkat kerusakan barang. Dalam perhitungan total biaya persediaan untuk *perishable product*, biaya kekurangan bahan dan biaya kadaluarsa bahan juga diikutsertakan sehingga total biaya persediaan untuk EOQ *perishable product* terdiri dari total biaya pembelian, total biaya pemesanan, total biaya penyimpanan, total biaya kekurangan bahan, dan total biaya kadaluarsa bahan.

$$TIC(Q.Q_d) = TB + TP + TS + TK + TD$$

$$= BD + S\frac{D}{Q} + \frac{(Q^2 - Q_d^2)}{2Q}S + \frac{Q_d^2}{2Q}K + Q_d(B - J)$$

$$= BD + S\frac{D}{Q} + \frac{Q^2 S}{2Q} - \frac{Q_d^2 S}{2Q} + \frac{Q_d^2 K}{2Q} + Q_d(B\text{-}J) \qquad \ldots(20)$$

Untuk membuat total biaya persediaan minimum, persamaan (20) diturunkan terhadap Q dan Q_d kemudian hasilnya dibuat sama dengan nol.

$$\frac{\partial TIC(Q.Q_d)}{\partial Q} = 0$$

$$\frac{\partial\left(BD + S\frac{D}{Q} + \frac{Q^2 S}{2Q} - \frac{Q_d^2 S}{2Q} + \frac{Q_d^2 K}{2Q} + Q_d(B\text{-}J)\right)}{\partial Q} = 0$$

$$0 + \left(-\frac{SD}{Q^2}\right) + \frac{S}{2} - \left(-\frac{Q_d^2 S}{2Q^2}\right) + \left(-\frac{Q_d^2 K}{2Q^2}\right) + 0 - 0 = 0$$

$$\frac{S}{2} = \frac{SD}{Q^2} - \frac{Q_d^2 S}{2Q^2} + \frac{Q_d^2 K}{2Q^2}$$

$$\frac{S}{2} = \frac{2SD - Q_d^2 S + Q_d^2 K}{2Q^2}$$

$$2Q^2 S = 2(2SD - Q_d^2 S + Q_d^2 K)$$

$$Q^2 = \frac{2\left(2SD - Q_d^2 S + Q_d^2 K\right)}{2S}$$

$$Q^2 = \frac{2SD - Q_d^2 (S - K)}{S}$$

$$\sqrt{Q^2} = \sqrt{\frac{2SD - Q_d^2 (S - K)}{S}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2SD - Q_d^2 (S - K)}{S}} \qquad \ldots(21)$$

$$\frac{\partial TIC\left(Q, Q_d\right)}{\partial Q_d} = 0$$

$$\frac{\partial\left(BD + S\frac{D}{Q} + \frac{Q^2 S}{2Q} - \frac{Q_d^2 S}{2Q} + \frac{Q_d^2 K}{2Q} + Q_d (B\text{-}J)\right)}{\partial Q_d} = 0$$

$$0 + 0 + 0 - \frac{2Q_d S}{2Q} + \frac{2Q_d K}{2Q} + (B - J) = 0$$

$$B - J = \frac{2Q_d S}{2Q} - \frac{2Q_d K}{2Q}$$

$$= \frac{2Q_d S - 2Q_d K}{2Q}$$

$$2Q(B - J) = 2Q_d (S - K)$$

$$Q_d = \frac{2Q(B - J)}{2(S - K)}$$

$$Q_d = \frac{Q(B - J)}{(S - K)} \qquad \ldots(22)$$

Substitusikan persamaan (22) ke persamaan (21) sehingga diperoleh nilai Q yang optimal sebagai berikut:

$$Q^2 = \frac{2SD - (Q_d)^2(S - K)}{S}$$

$$(Q^*)^2 = \frac{2SD - \left(\frac{Q^*(B - J)}{(S - K)}\right)^2 (S - K)}{S}$$

$$= \frac{2SD - \frac{(Q^*)^2(B - J)^2}{(S - K)^2}(S - K)}{S}$$

$$= \frac{2SD - \frac{(Q^*)^2(B - J)^2}{(S - K)}}{S}$$

$$(Q^*)^2 S = \frac{2SD(S - K) - (Q^*)^2(B - J)^2}{(S - K)}$$

$$(Q^*)^2 S(S - K) = 2SD(S - K) - (Q^*)^2(B - J)^2$$

$$(Q^*)^2 S(S - K) + (Q^*)^2(B - J)^2 = 2SD(S - K)$$

$$(Q^*)^2(S(S - K) + (B - J)^2) = 2SD(S - K)$$

$$(Q^*)^2 = \frac{2SD(S - K)}{S(S - K) + (B - J)^2}$$

$$\sqrt{(Q^*)^2} = \sqrt{\frac{2SD(S - K)}{S(S - K) + (B - J)^2}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2SD(S - K)}{S(S - K) + (B - J)^2}} \qquad \ldots(23)$$

Persamaan (22) dapat digunakan untuk menghitung kuantitas bahan kadaluarsa yang optimal untuk meminimumkan total biaya persediaan dengan mensubstitusikan nilai Q^* pada persamaan (23) ke nilai Q pada persamaan (22) sebagai berikut:

$$Q_d^* = \frac{Q^*(B - J)}{(S - K)} \qquad \ldots(24)$$

Untuk memperoleh total biaya persediaan minimum, substitusikan persamaan (23) dan (24) ke persamaan (20) sehingga diperoleh $TIC\left(Q^*, Q_d^*\right)$.

Asumsi yang harus dipenuhi dalam metode EOQ untuk *perishable product* adalah sebagai berikut:

1. Kuantitas permintaan diketahui dan konstan.
2. Harga pembelian setiap unit diketahui dan konstan.
3. Biaya pemesanan, biaya penyimpanan, biaya kekurangan bahan serta biaya kadaluarsa diketahui.
4. Biaya penyimpanan lebih dari biaya kekurangan bahan.

3.4 *Economic Order Quantity* dengan Diskon

Diskon atau potongan harga yang ditawarkan oleh pihak *supplier* jika membeli dalam kuantitas tertentu tidak selamanya memberikan keuntungan yang signifikan bagi perusahaan. Oleh karena itu, EOQ dapat dikembangkan untuk *item* yang memiliki beberapa tingkatan harga sesuai dengan kuantitas yang akan dipesan. EOQ dengan diskon ini bertujuan untuk menentukan kuantitas pesanan ekonomis yang dapat meminimumkan total biaya persediaan melalui pemanfaatan faktor diskon. Faktor diskon berpengaruh pada penentuan harga pembelian sebagai berikut:

$$B_j = \begin{cases} B_1 \text{ untuk } U_1 \leq Q < U_2 \\ B_2 \text{ untuk } U_2 \leq Q < U_3 \\ \quad . \\ \quad . \\ B_k \text{ untuk } U_k \leq Q < U_{k+1} \end{cases} ; \qquad \text{dengan } B_k > B_{k+1}$$

U adalah batas jumlah bahan yang dipesan dimana terjadi perubahan tingkat unit harga (*price break quantity*) dan B_j adalah harga pembelian pada *price break quantity* ke-j per unit per periode pemesanan (j = 1, 2, ..., k), sehingga total biaya persediaan dengan adanya faktor diskon adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} TIC(Q) &= TB + TP + TS \\ &= B_j D + P\frac{D}{Q} + S\frac{Q}{2} \end{aligned} \qquad \ldots(25)$$

Persamaan (25) harus didiferensialkan terhadap Q dan dibuat sama dengan nol untuk memperoleh total biaya persediaan yang minimum.

$$\frac{dTIC(Q)}{dQ} = 0$$

$$\frac{d(TB + TP + TS)}{dQ} = 0$$

$$\frac{d\left(B_j D + P\frac{D}{Q} + S\frac{Q}{2}\right)}{dQ} = 0$$

$$\frac{d}{dQ}\left(B_j D + P\frac{D}{Q} + S\frac{Q}{2}\right) = 0$$

$$0 + \left(-PD\frac{1}{(Q^*)^2}\right) + \frac{1}{2}S = 0$$

$$\frac{-PD}{(Q^*)^2} + \frac{S}{2} = 0$$

$$\frac{S}{2} - \frac{PD}{(Q^*)^2} = 0$$

$$\frac{S}{2} = \frac{PD}{(Q^*)^2}$$

$$(Q^*)^2 = \frac{2PD}{S}$$

$$\sqrt{(Q^*)^2} = \sqrt{\frac{2PD}{S}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2PD}{S}} \qquad \ldots(26)$$

Persamaan (26) sama dengan persamaan (9) yang merupakan rumus EOQ klasik karena faktor diskon hanya akan berpengaruh pada biaya pembelian sedangkan biaya pemesanan dan biaya penyimpanan tetap. *Supplier* akan menawarkan beberapa macam harga dengan batasan kuantitas tertentu. Q^* digunakan untuk menghitung Q optimal pada setiap *price break quantity*. Jika Q^* terdapat pada interval *price break quantity*, maka kuantitas yang digunakan adalah nilai Q^* tersebut. Jika Q^* tidak terletak pada interval *price break quantity* terkait, maka kuantitas yang digunakan adalah batas *price break quantity* tersebut.

Setelah menentukan kuantitas pesanan, kemudian total biaya persediaan dihitung untuk masing-masing *price break quantity* dan *price break quantity* yang menghasilkan total biaya persediaan terkecil, dapat dipilih sebagai bahan pertimbangan untuk memanfaatkan atau tidak faktor diskon yang diberikan oleh *supplier*.

Secara lebih rinci, prosedur perhitungan kuantitas pesanan yang ekonomis dengan memanfaatkan faktor diskon dapat diuraikan melalui algoritma sebagai berikut:

Langkah 1 : Hitung nilai Q^* pada setiap *price break quantity*.

Langkah 2 : Bandingkan nilai Q^* dengan U.

Jika Q^* berada pada interval $U_j \leq Q^* < U_{j+1}$, maka nilai Q^* valid.

Langkah 3 : Jika Q^* valid, maka lanjutkan ke langkah 5.

Jika Q^* tidak valid, maka lanjutkan ke langkah 4.

Langkah 4 : Jika $Q^* < U$, maka gunakan $Q^* = U_j$.

Jika $Q^* \geq U$, maka gunakan $Q^* = U_{j+1}$.

Langkah 5 : Hitung total biaya persediaan untuk setiap *price break quantity* dengan Q^* yang valid dan semua U yang mungkin.

Langkah 6 : Bandingkan total biaya persediaan pada setiap *price break quantity*. Pilih *price break quantity* dengan Q^* yang menghasilkan total biaya persediaan terkecil.

Jika EOQ berada pada interval harga diskon maka perusahaan sebaiknya memanfaatkan harga diskon tersebut, jika tidak maka perlu dianalisis apakah perusahaan tetap perlu mengikuti kuantitas pembelian sesuai dengan perencanaan atau justru mengubah kebijakan pembelian untuk memanfaatkan harga diskon tersebut. Dalam metode EOQ yang dipengaruhi oleh faktor diskon, terdapat beberapa asumsi yang harus dipenuhi, yaitu:

1. Kuanitas permintaan (*demand*) diketahui dan konstan.
2. Waktu tunggu (*lead time*) diketahui dan konstan.

3. Harga pembelian per unit diketahui, bergantung pada kuantitas pesanan dan *price break quantity*.
4. Biaya pemesanan dan biaya penyimpanan diketahui.
5. Kasus EOQ adalah *single-item*.

3.5 *Economic Order Quantity Multiitem* dengan Mempertimbangkan Waktu Kadaluarsa dan Faktor Diskon

Dalam dunia nyata, cukup sulit untuk menemukan perusahaan yang melakukan pemesanan bahan baku hanya satu *item* kepada seorang *supplier* karena hal tersebut dianggap dapat membuat biaya pemesanan membengkak. Waktu kadaluarsa barang dan faktor diskon juga menjadi salah satu pertimbangan bagi sebuah perusahaan untuk menentukan kuantitas pesanan yang ekonomis. Oleh karena itu, EOQ tidak hanya berlaku untuk kasus pemesanan *single-item*, tetapi dapat juga dikembangkan untuk kasus *multiitem*. Selain itu EOQ juga dapat dikembangkan dengan memperhatikan adanya waktu kadaluarsa dan faktor diskon.

Dalam metode EOQ untuk *multiitem* yang mempertimbangkan waktu kadaluarsa dan faktor diskon, terdapat beberapa komponen biaya yang menyusun total biaya persediaan yaitu total biaya pembelian, total biaya pemesanan, total biaya penyimpanan, total biaya kekurangan bahan, dan total biaya kadaluarsa bahan.

1. Total Biaya Pembelian

$$TB = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} D_i \qquad \dots(27)$$

Dengan B_{ij} = harga pembelian *item* ke-i, pada *price break quantity* ke-j per unit per periode pemesanan, dimana

$$B_{ij} = \begin{cases} B_{i1} \text{ untuk } U_{i1} \leq Q < U_{i2} \\ B_{i2} \text{ untuk } U_{i2} \leq Q < U_{i3} \\ . \\ . \\ B_{ik} \text{ untuk } U_{ik} \leq Q < U_{i(k+1)} \end{cases} ; \quad \text{dengan } B_{ik} > B_{i(k+1)}$$

2. Total Biaya Pemesanan

$$TP = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{D_i}{Q_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i F_i \qquad \dots(28)$$

Tujuan utama EOQ adalah untuk meminimumkan total biaya persediaan. Salah satu cara untuk mencapai tujuan tersebut adalah dengan menghemat biaya pemesanan. Dalam hal ini, pemesanan dilakukakan dalam waktu yang sama untuk semua *item*, sehingga frekuensi pemesanan untuk n *item* sama, yaitu sebesar F dan biaya satu kali proses pemesanan untuk n *item* juga sama, yaitu sebesar P. Sama halnya dengan EOQ untuk kasus *multiitem* pada bagian 3.2, total biaya pemesanan menjadi:

$$TP = PF \qquad \dots(29)$$

3. Total Biaya Penyimpanan

$$TS = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i^2 - Q_{d_i}^2}{2Q_i} S_i \qquad \dots(30)$$

4. Total Biaya Kekurangan Bahan

$$TK = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{d_i}^2}{2Q_i} K_i \quad \ldots(31)$$

5. Total Biaya Kadaluarsa Bahan

Biaya kadaluarsa bahan yaitu biaya yang harus dikeluarkan oleh pihak perusahaan akibat sejumlah barang yang rusak atau mengalami kadaluarsa. Beberapa perusahaan industri melakukan penjualan terhadap bahan-bahan yang sudah kadaluarsa dengan tujuan untuk memperkecil kerugian yang akan diderita. Total biaya kadaluarsa bahan didefinisikan oleh persamaan (6). Dalam EOQ *multiitem* dengan faktor diskon, biaya kadaluarsa bahan adalah

$$TD = \sum_{i=1}^{n} Q_{d_i}\left(B_{ij} - J_i\right) \quad \ldots(32)$$

6. Total Biaya Persediaan

Untuk mengetahui total biaya persediaan, persamaan (27), (29), (30), (31), dan (32) disubstitusikan ke persamaan (33) berikut:

$$TIC(Q,Q_d) = TB + TP + TS + TK + TD \quad \ldots(33)$$

$$TIC\left(Q,Q_d\right) = \sum_{i=1}^{n} B_{ij}D_i + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{D_i}{Q_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i^2 - Q_{d_i}^2}{2Q_i} S_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{d_i}^2}{2Q_i} K_i + \sum_{i=1}^{n} Q_{d_i}\left(B_{ij} - J_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} B_{ij}D_i + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{D_i}{Q_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i^2 S_i}{2Q_i} - \frac{Q_{d_i}^2 S_i}{2Q_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{d_i}^2}{2Q_i} K_i + \sum_{i=1}^{n} Q_{d_i}\left(B_{ij} - J_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} B_{ij}D_i + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{D_i}{Q_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i^2 S_i}{2Q_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{d_i}^2 S_i}{2Q_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{d_i}^2}{2Q_i} K_i + \sum_{i=1}^{n} Q_{d_i}\left(B_{ij} - J_i\right) \quad \ldots(34)$$

Akibatnya,

$$\mathrm{TIC}(F,Q_d)=\sum_{i=1}^{n} B_{ij}D_i + PF + \sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{D_i}{F_i}S_i}{2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{Q_{d_i}^2 S_i}{2\frac{D_i}{F_i}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{Q_{d_i}^2 K_i}{2\frac{D_i}{F_i}} + \sum_{i=1}^{n} Q_{d_i}(B_{ij}-J_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} B_{ij}D_i + PF + \sum_{i=1}^{n}\frac{D_iS_i}{2F} - \sum_{i=1}^{n}\frac{FQ_{d_i}^2 S_i}{2D_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{FQ_{d_i}^2 K_i}{2D_i} + \sum_{i=1}^{n} Q_{d_i}(B_{ij}-J_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} B_{ij}D_i + PF + \frac{1}{2F}\sum_{i=1}^{n} D_iS_i - \frac{F}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_{d_i}^2 S_i}{D_i} + \frac{F}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_{d_i}^2 K_i}{D_i} + \sum_{i=1}^{n} Q_{d_i}(B_{ij}-J_i) \quad \ldots(35)$$

Sama halnya dengan kasus EOQ *multiitem* dan *perishable product*, untuk mendapatkan total biaya persediaan yang minimum, maka persamaan (35) didiferensialkan terhadap F dan Q_d dan masing-masing hasilnya dibuat sama dengan nol.

$$\frac{\partial \mathrm{TIC}(F,Q_d)}{\partial F}=0$$

$$0 + P + \left(-\frac{1}{2F^2}\sum_{i=1}^{n} D_iS_i\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_{d_i}^2 S_i}{D_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_{d_i}^2 K_i}{D_i} + 0 = 0$$

$$P + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_{d_i}^2 K_i}{D_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_{d_i}^2 S_i}{D_i} = \frac{1}{2F^2}\sum_{i=1}^{n} D_iS_i$$

$$P + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_{d_i}^2 K_i}{D_i} - \frac{Q_{d_i}^2 S_i}{D_i}\right) = \frac{1}{2F^2}\sum_{i=1}^{n} D_iS_i$$

$$P + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_{d_i}^2 K_i}{D_i} - \frac{Q_{d_i}^2 S_i}{D_i}\right) = \frac{1}{2F^2}\sum_{i=1}^{n} D_iS_i$$

$$2P + \sum_{i=1}^{n}\frac{Q_{d_i}^2 (K_i - S_i)}{D_i} = \frac{1}{F^2}\sum_{i=1}^{n} D_iS_i$$

$$F^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i}{2P + \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{d_i}^2 (K_i - S_i)}{D_i}}$$

$$\sqrt{F^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i}{2P + \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{d_i}^2 (K_i - S_i)}{D_i}}}$$

$$F = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i}{2P + \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{d_i}^2 (K_i - S_i)}{D_i}}} \qquad \ldots(36)$$

$$\frac{\partial TIC(F, Q_d)}{\partial Q_{d_i}} = 0$$

$$0 + 0 + 0 - \frac{F}{2} \cdot \frac{2Q_{d_i} S_i}{D_i} + \frac{F}{2} \cdot \frac{2Q_{d_i} K_i}{D_i} + (B_{ij} - J_i) = 0$$

$$B_{ij} - J_i = \frac{FQ_{d_i} S_i - FQ_{d_i} K_i}{D_i}$$

$$B_{ij} - J_i = \frac{FQ_{d_i} (S_i - K_i)}{D_i}$$

$$Q_{d_i} = \frac{(B_{ij} - J_i) D_i}{(S_i - K_i) F} \qquad \ldots(37)$$

Substitusikan persamaan (37) ke persamaan (36) sehingga diperoleh:

$$F^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i}{2P + \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{d_i}^2 (K_i - S_i)}{D_i}}$$

$$(F^*)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i}{2P + \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{(B_{ij} - J_i)D_i}{(S_i - K_i)F^*}\right)^2 (K_i - S_i)}{D_i}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i}{2P + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{(B_{ij} - J_i)^2 D_i^2 (K_i - S_i)}{(S_i - K_i)^2 (F^*)^2}}{D_i}}$$

$$(F^*)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i}{2P + \sum_{i=1}^{n} \frac{(B_{ij} - J_i)^2 D_i^2 (K_i - S_i)}{(S_i - K_i)^2 (F^*)^2 D_i}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i}{2P + \frac{1}{(F^*)^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(B_{ij} - J_i)^2 D_i (S_i - K_i)}{-(S_i - K_i)(S_i - K_i)}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i}{2P + \frac{1}{(F^*)^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(B_{ij} - J_i)^2 D_i}{(K_i - S_i)}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i S_i = 2P(F^*)^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(B_{ij} - J_i)^2 D_i}{(K_i - S_i)}$$

$$(F^*)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{(B_{ij} - J_i)^2 D_i}{(K_i - S_i)}}{2P}$$

$$\sqrt{(F^*)^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{(B_{ij} - J_i)^2 D_i}{(K_i - S_i)}}{2P}}$$

$$F^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{(B_{ij} - J_i)^2 D_i}{(K_i - S_i)}}{2P}} \qquad \ldots(38)$$

Nilai Q^* dihitung dengan mensubstitusikan persamaan (38) ke persamaan (11). Nilai Q^* dicari untuk setiap *price break quantity* yang tepat dan setelah itu tentukan nilai $Q^*_{d_i}$ dengan mensubstitusikan nilai F^* pada persamaan (38) ke nilai F pada persamaan (37) sehingga diperoleh:

$$Q^*_{d_i} = \frac{(B_{ij} - J_i)D_i}{(S_i - K_i)F^*} \qquad \ldots(39)$$

Kemudian hitung nilai $TIC(Q^*, Q^*_d)$ melalui persamaan (34) atau $TIC(F^*, Q^*_d)$ melalui persamaan (35). Jika Q^* berada pada *price break quantity* yang tepat, maka Q^* dikatakan valid.

Untuk validasi metode EOQ yang diterapkan pada kasus *multiitem* dengan mempertimbangkan waktu kadaluarsa dan faktor diskon, dimisalkan tidak ada bahan yang kadaluarsa atau $Q_{di} = 0$, sehingga $\frac{(B_{ij} - J_i)D_i}{(S_i - K_i)F} = \frac{(B_{ij} - J_i)Q_i}{(S_i - K_i)} = 0$. Agar persamaan tersebut terdefinisi, maka $(S_i - K_i) \neq 0$. Jika tidak ada bahan yang kadaluarsa, maka tidak akan ada biaya kadaluarsa bahan atau $(B_{ij} - Ji) = 0$ dan biaya kekurangan bahan akibat faktor kadaluarsa pun tidak ada atau $K_i = 0$. Dari ketentuan-ketentuan tersebut, maka persamaan (36) akan berbentuk:

$$F^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{0^2 D_i}{(K_i - S_i)}}{2P}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i - 0}{2P}}$$

$$F^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i S_i}{2P}} \qquad \ldots(40)$$

Bentuk persamaan (40) sama dengan persamaan (18) yang merupakan bentuk dasar bagi F^* untuk EOQ *multiitem*.

Algoritma EOQ untuk kasus *multiitem* yang dipengaruhi oleh waktu kadaluarsa dan faktor diskon dapat diuraikan sebagai berikut:

Langkah 1 : Pilih harga pembelian per unit terendah untuk setiap *item* (B_{ik}).

Langkah 2 : Hitung nilai F^* dengan menggunakan harga pembelian pada *price break quantity* yang telah ditentukan.

Langkah 3 : Hitung nilai Q^* untuk *item* ke-i sampai ke-n melalui $F^* = \frac{D_i}{Q_i^*}$.

Langkah 4 : Hitung kuantitas bahan yang kadaluarsa untuk setiap *item* $\left(Q_{d_i}^*\right)$.

Langkah 5 : Untuk setiap *item*, bandingkan Q_i^* dengan U (*price break quantity*). Jika Q^* berada pada interval $U_j \leq Q^* < U_{j+1}$, maka nilai Q^* valid.

Langkah 6 : Jika Q_i^* untuk i = 1, 2, ..., n valid, maka lanjutkan ke langkah 8.

Langkah 7 : Jika Q_i^* tidak valid, maka:

a. untuk $Q_i^* < U$, gunakan $Q_i^* = U_k$.

b. untuk $Q_i^* \geq U$, gunakan $Q_i^* = U_{k+1}$.

Langkah 8 : Hitung total biaya persediaan (TIC)

Langkah 9 : Jika Q_i^* valid untuk setiap *item*, maka lanjutkan ke langkah 12.

Langkah 10 : Untuk *item* dengan Q_i^* yang tidak valid, tentukan harga pembelian terendah selanjutnya ($B_{i(k-1)}$).

Langkah 11 : Kembali ke langkah 2.

Langkah 12 : Bandingkan semua TIC yang diperoleh selama iterasi dengan Q_i^* yang valid dan semua U yang mungkin, kemudian pilih TIC yang bernilai minimum.

Asumsi-asumsi yang harus dipenuhi dalam EOQ kasus *multiitem* dengan mempertimbangkan waktu kadaluarsa dan faktor diskon pada dasarnya hampir sama dengan asumsi pada metode EOQ klasik, EOQ *multiitem*, EOQ *perishable product*, dan EOQ dengan diskon, yaitu:

1. Kuantitas permintaan (*demand*) untuk semua *item* diketahui dan konstan.
2. Harga pembelian per unit untuk setiap *item* diketahui dan konstan untuk setiap *price break quantity*.
3. Biaya pemesanan, biaya penyimpanan, biaya kadaluarsa bahan serta biaya kekurangan bahan diketahui dan bersifat konstan.
4. Pemesanan dilakukan secara bersamaan untuk semua *item*.
5. Semua *item* memiliki waktu kadaluarsa yang sama.
6. Tidak terjadi *back order*.
7. *Lead time* untuk setiap *item* diketahui dan konstan.
8. Biaya simpan per unit per *item* lebih dari biaya kekurangan bahan.