

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan pengetahuan tentang ruang fungsi dan pembentukan ruang fungsi yang baru terhitung pesat. Seperti pada ajang “prize problem” yang ke-2 pada tahun 1968 Matematikawan Belanda telah banyak membahas tentang bagaimana menentukan dual banach dari ruang barisan *Cesaro* dan ruang fungsi *Cesaro*. Masalah yang dibahas diantaranya menentukan dual banach dari ruang barisan *Cesaro* yang telah diselesaikan oleh Jagers. Sejalan dengan Jagers, Ng dan Lee berhasil menentukan dual banach dari ruang fungsi *Cesaro*. Studi lebih lanjut menunjukkan bahwa hasil dari Jagers dapat digunakan untuk mendapatkan dual banach dari ruang fungsi *Cesaro*.

Ruang fungsi yang telah banyak dipelajari diantaranya adalah $C[a,b]$, yaitu ruang dari semua fungsi kontinu pada selang $[a,b]$, dan ruang fungsi klasik $L_p(0,\mathbb{R})$ yaitu ruang dari semua fungsi terukur bernilai real dengan norma khusus yang didefinisikan padanya. Masalah yang menarik untuk dipelajari dari $L_p(0,\mathbb{R})$ adalah pembentukan ruang baru dan mengkaji sifat-sifat yang diawetkan oleh ruang baru yang terbentuk.

Berdasarkan hal di atas maka peneliti termotivasi untuk melakukan penelitian tentang ruang fungsi, khususnya ruang fungsi klasik $L_p(0,\mathbb{R})$ yang dimodifikasi, yaitu dengan cara mengoperasikan suatu operator linier T pada ruang fungsi klasik $L_p(0,\mathbb{R})$ yang selanjutnya dapat ditemukan hubungan antara

ruang fungsi klasik $L_p(0, \infty)$ dengan ruang fungsi yang terbentuk, yang selanjutnya disebut sebagai ruang fungsi *Cesaro*.

Oleh karena itu, tugas akhir ini diberi judul “RUANG FUNGSI CESARO”.

1.2 Rumusan dan Batasan Masalah

Dalam pembahasan mengenai suatu ruang fungsi selalu dikaitkan dengan pembentukannya, dan sifat-sifat yang berlaku pada ruang fungsi tersebut. Oleh karena itu, yang menjadi masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana definisi ruang fungsi yang baru (ruang fungsi *Cesaro*) yang dikaitkan dengan ruang fungsi klasik $L_p(0, \infty)$, dan menelusuri sifat-sifat yang berlaku pada ruang fungsi baru (ruang fungsi *Cesaro*).

Secara khusus, masalah tersebut dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu:

1. Bagaimana definisi ruang fungsi *Cesaro*
2. Sifat-sifat apa yang berlaku pada ruang fungsi *Cesaro*.

Mengingat adanya keterbatasan waktu, dan agar permasalahan tidak terlalu melebar maka permasalahan tersebut dibatasi. Untuk permasalahan mengenai sifat-sifat yang berlaku pada ruang fungsi *Cesaro*, dibatasi hanya untuk menentukan:

1. Bagaimana kelengkapan ruang fungsi *Cesaro*.
2. Ruang *dual Banach* dari ruang fungsi *Cesaro*.

Penelitian ini dibatasi hanya pada pembahasan ruang fungsi bernilai real.

1.3 Tujuan penelitian

Secara umum penelitian ini bertujuan untuk membentuk ruang fungsi baru, yaitu ruang fungsi yang dibangun dengan menerapkan operator linier T pada ruang fungsi klasik $L_p(0, \mathbb{Y})$ dan menelusuri hubungan antara sifat-sifat yang berlaku pada ruang fungsi klasik $L_p(0, \mathbb{Y})$ dengan ruang fungsi *Cesaro* (ruang fungsi yang terbentuk).

Secara khusus penelitian ini bertujuan untuk menelusuri definisi ruang fungsi *Cesaro* pada suatu ruang fungsi real, menunjukkan kelengkapan ruang fungsi *Cesaro*, menentukan ruang dual banach.

1.4 Manfaat yang diharapkan

Pelaksanaan penelitian ini tentunya akan memberikan banyak manfaat baik bagi mahasiswa maupun bagi kalangan lainnya. Bagi mahasiswa, dengan adanya penelitian ini merupakan ajang untuk menggali ilmu baru serta mempercepat selesainya masa studi. Sedangkan untuk kalangan lainnya merupakan sumber bacaan untuk meningkatkan kemampuan diri dalam menggali dan mengembangkan ilmu, serta memberikan motivasi untuk melakukan penelitian bidang matematika khususnya di bidang analisis fungsional.

1.5 Prosedur Penelitian

Desain dan metode yang digunakan yaitu dengan mempelajari karya ilmiah yang berupa jurnal, laporan penelitian, buku-buku teks utama, maupun buku teks penunjang.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika dalam penulisan tugas akhir ini, yaitu:

1. BAB I (Pendahuluan), merupakan pengantar dari tugas akhir ini. Pada bab ini akan dibahas tentang latar belakang masalah, rumusan dan batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat yang diharapkan, prosedur penelitian, dan sistematika penulisan.
2. BAB II (Teori Pendukung), disini disajikan beberapa materi dasar yang diperlukan dalam pembahasan pokok permasalahan (ruang fungsi *Cesaro*), diantaranya akan dibahas tentang pengertian ruang dual banach, himpunan solid, ruang metrik dan ruang bernorma, kelengkapan dan ruang banach, ekuivalensi dua norma, keterukuran ruang fungsi, keterbagian (*Separability*), himpunan terhitung, himpunan padat, dan sebagainya.
3. BAB III (Ruang Fungsi *Cesaro*), merupakan inti dalam tugas akhir ini yakni berisi pembahasan pokok permasalahan. Dalam bab ini akan dibahas tentang definisi ruang fungsi *Cesaro*, kelengkapan ruang fungsi *Cesaro*, sifat-sifat pada ruang fungsi *Cesaro*.
4. BAB IV (Dual dari Ruang Fungsi *Cesaro*), membahas tentang dual banach dari ruang fungsi *Cesaro*.
5. BAB V (Kesimpulan dan Saran), menyajikan tentang kesimpulan penulis mengenai keseluruhan isi tugas akhir, dan saran bagi penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan ruang fungsi *Cesaro*.