BAB III

SISTEM OPERATOR DAN PEMETAAN POSITIF

III.1 Spektrum dari Aljabar Banach

Definisi III.1.1: Spektrum dari Aljabar Banach [11]

Misalkan B adalah aljabar Banach yang memuat identitas. Spektrum dari elemen $x \in B$ *ditulis* $\sigma_B(x)$ $(atau\ \sigma(x))$ *adalah himpunan*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda.1 - x \text{ non invertibel di } B\}.$$

Konsep spektrum dari suatu operator adalah perluasan dari konsep nilai eigen untuk matriks. Operator pada ruang dimensi takhingga mungkin saja tidak mempunyai nilai eigen.

Contoh III.1.2:

Misalkan ruang Hilbert l^2 dan T operator geser dengan definisi

$$T : l^2 \to l^2$$

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Akan ditunjukkan bahwa T tidak mempunyai nilai eigen.

Misalkan $x = (x_n)$ di l^2, $T_x := y = (x_{n-1}); n > 1$, dan $x_0 = 0$.

Andaikan terdapat $\lambda \in \mathbb{C}$ sehingga (III.1.2.1)

$$T_x = \lambda x$$

$$(0, x_1, x_2, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots).$$

Akibatnya diperoleh $\lambda x_1 = 0, \lambda x_2 = x_1, \lambda x_3 = x_2, ..., \lambda x_n = \lambda x_{n-1}$. (III.1.2.2)

Sekarang perhatikan $x = (1,0,0,...), y = (0,1,0,...) \in \ell^2$, kondisi (III.1.2.2) mengakibatkan $\lambda = 0$, $0 = 1$ adalah sesuatu yang tidak benar. Jadi, pengandaian (III.1.2.1) adalah salah.

Dengan demikian, tidak ada nilai λ yang memenuhi.

III.2 Spektrum dari Aljabar-*C**

Definisi III.2.1: Spektrum dari aljabar-*C** [6]

Misalkan A adalah aljabar-C yang memiliki identitas 1. Spektrum dari suatu elemen* $a \in A$, *didefinisikan* $\sigma(a) = \sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda.1 - a \text{ non invertibel di } A\}$.

Teorema III.2.2: [6]

Misalkan A adalah aljabar-C dan* $a \in A$, *maka spektrum* $\sigma(a) = \sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda.1 - a \text{ non invertibel di } A\}$ *tidak kosong.*

<u>Bukti</u>:

Andaikan $\sigma(a) = \phi$, artinya $\lambda.1 - a$ invertibel untuk semua $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sekarang misalkan $A = \mathbb{C}$ aljabar-*C** di mana norm di $\mathbb{C}$ adalah modulus vektor, yaitu bila $a = f + ig \in \mathbb{C}$, maka norm a adalah

$$\|a\| = |a| = \sqrt{f^2 + g^2}.$$

Kemudian pemetaan $a \mapsto \bar{a}$ di mana $\bar{a}$ adalah konjugat dari a mendefinisikan involusi dan dapat ditunjukkan $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

Jika $\lambda = x + iy$ maka $\lambda.1 - a = (x + iy).1 - (f + ig) = (x - f) + i(y - g)$. (III.2.2.1)

Sesuai dengan pengandaian di atas, haruslah $\lambda.1 - a$ invertibel.

Artinya terdapat $\gamma = (\lambda.1 - a)^{-1}$, sebut $\gamma = (p + iq)$.

Sehingga $(\lambda.1 - a).\gamma = 1 = 1 + i0$.

Dari (III.2.2.1) diperoleh $(x - f) + i(y - g).\gamma = 1 + i0$. (III.2.2.2)

Kemudian ambil $\lambda = x + iy = f + ig = a$, akibatnya *x*=*f* dan *y*=*g*.

Dari (III.2.2.2) diperoleh

$$(0 + i0).\gamma = 1 + i0$$

$$(0 + i0).(p + iq) = 1 + i0$$

$$\left(0 + 2(i0) + i^2 0\right) = 1 + i0$$

$$0 + i0 = 1 + i0$$

$$0 = 1 \qquad \text{inkonsisten.}$$

Dengan demikian, pengandaian salah. Jadi haruslah $\sigma(a) \neq \phi$. $\square$

III.3 Unsur Positif pada Aljabar-C*

Definisi III.3.1: Unsur positif di aljabar-*C** [1]

Misalkan A aljabar-C. Suatu unsur a dari A adalah positif jika a self-adjoint* $(a^* = a)$ *dan* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_0^+$ *(himpunan bilangan real non negatif), dinotasikan dengan* $a \geq 0$. *Himpunan* A^+ *adalah koleksi dari semua unsur positif di A. Suatu unsur a adalah negatif jika* $-a \in A^+$, *ditulis* $a \leq 0$, *dan himpunan* A^- *adalah koleksi dari semua unsur negatif di A.*

Teorema III.3.2: [6]

Misalkan A aljabar-C dan* $a \in A$ *adalah suatu unsur positif, maka terdapat secara tunggal* $b \in A$ *sedemikian sehingga* $a = b^* b$.

Bukti dari Teorema III.3.2 terdapat pada [6].

Misalkan X adalah ruang topologi. Suatu kelas subset buka $\{G_i\}$ di X disebut *cover* buka jika setiap titik di X termuat di salah satu G_i. Suatu sub kelas dari *cover* buka yang masih merupakan *cover* buka disebut sebagai *subcover* buka. Selanjutnya, ruang topologi di mana setiap *cover* bukanya memiliki *subcover* yang berhingga, artinya setiap *cover* bukanya dapat direduksi menjadi *subcover* yang berhingga jumlahnya disebut ruang kompak. Hal ini dinyatakan dalam [14].

Misalkan X suatu ruang kompak dan aljabar-C^* $C(X)$ adalah himpunan fungsi-fungsi kontinu dari X ke $\mathbb{C}$ di mana adjointnya $f^*(x) = \overline{f(x)}$ dan pemetaan $f \mapsto \overline{f}$ mendefinisikan suatu involusi. Sedangkan normnya didefinisikan sebagai $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ di mana untuk setiap $f \in C(X)$ berlaku

$$\|f^*(x)\, f(x)\| = \sup\{|f^*(x)\, f(x)| : x \in X\}$$

$$= \sup\{|\overline{f(x)} f(x)| : x \in X\}$$

$$= \sup\left\{ \left| f(x) \right|^2 : x \in X \right\}$$

$$= \left\| f(x) \right\|^2 .$$

Kemudian, karena pada *C*(*X*) berlaku operasi titik demi titik maka $(f.g)(x) = f(x)g(x)$. Bila $f(x) \neq 0$ untuk semua *x* di *X* maka *f* memiliki invers yaitu $\frac{1}{f}$ di mana $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$ dan $f(x).\frac{1}{f(x)} = 1$.

Lemma III.3.3:

Misalkan X suatu ruang kompak maka $\forall f \in C(X)$ *berlaku* $\sigma(f) = R_f$.

<u>Bukti</u>:

Misalkan $\lambda \notin \sigma(f)$ jika dan hanya jika $\lambda.1 - f$ invertibel

$$\Leftrightarrow (\lambda.1 - f)(x) \neq 0 \;;\; \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow f(x) \neq \lambda \;;\; \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow \lambda \notin R_f$$

Jadi, $\lambda \notin \sigma(f) \Leftrightarrow \lambda \notin R_f$

Hal ini ekuivalen dengan $\lambda \in \sigma(f) \Leftrightarrow \lambda \in R_f$.

Jadi, $\sigma(f) = R_f$. □

Teorema III.3.4: [1]

Misalkan f adalah unsur dari aljabar-C C(X), maka f adalah unsur positif jika dan hanya jika* $f(x) \geq 0$ *untuk semua* $x \in X$.

<u>Bukti</u>:

$(\Leftarrow)$ Misalkan $f(x) \geq 0$ untuk semua *x*, akan ditunjukkan $\sigma(f) \geq 0$ dan $\overline{f(x)} = f(x)$.

Berdasarkan definisi, $\lambda \in \mathbb{C}$ adalah anggota dari $\sigma(f)$ jika dan hanya jika $\lambda.1 - f$ non invertibel. Akibatnya terdapat x_o sehingga $(\lambda.1 - f)(x_o) = 0$ dan diperoleh $f(x_o) = \lambda$. Karena $f(x_o) \geq 0$ akibatnya $\lambda \geq 0$.

Jadi $\sigma(f) \geq 0$. (III.3.4.1)

Karena $f(x) \geq 0$, maka $f(x) \in \mathbb{R}$ di mana $f(x) = a_x + ib_x = a_x$; $b_x = 0$ dan $a_x \geq 0$. Akibatnya $\overline{f(x)} = a_x$.

Jadi, $\overline{f(x)} = f(x)$. (III.3.4.2)

Dari (III.3.4.1) dan (III.3.4.2) dapat disimpulkan bahwa *f* adalah unsur positif.

$(\Rightarrow)$ Karena *f* unsur positif maka $\sigma(f) \geq 0$, akan ditunjukkan $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in X$.

Berdasarkan definisi spektrum, $\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda.1 - f \text{ non invertibel}\}$.

Karena $\sigma(f) \geq 0$ maka $\lambda \geq 0$. Kemudian karena $\sigma(f) = R_f$ (Lemma III.3.3) akibatnya $f(x) \geq 0$; $\forall x \in X$.

Jadi, f adalah unsur positif dari aljabar-C* $C(X)$ jika dan hanya jika $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in X$. □

Proposisi III.3.5: [1]

Misalkan A suatu aljabar-C, dan* $a = a^* \in A$. *Maka terdapat secara tunggal unsur-unsur positif* u *dan* v *pada* A *sedemikian sehingga* $a = u - v$ *dan* $uv = vu = 0$.

Untuk membuktikan Proposisi III.3.5 kita perlu meninjau konsep *kalkulus fungsional*. Bukti dari Proposisi III.3.5 tidak disajikan dalam Tugas Akhir ini. Pembuktian terdapat pada [1].

III.4 Fungsional Linear Positif pada Aljabar-*C**

Definisi III.4.1: Representasi dari aljabar-*C** [1]

Misalkan A suatu aljabar-C, suatu representasi dari A adalah pasangan* (π, H), *di mana H ruang Hilbert dan* $\pi : A \to B(H)$ *adalah homomorfisma aljabar-C*. Jika A unital maka* $\pi(1) = 1$.

Kita akan membedakan pemetaan linear dari ruang vektor *V* ke lapangannya dengan pemetaan linear umum dari ruang vektor *V* ke ruang vektor *W*. Suatu pemetaan linear dari ruang vektor *V* ke lapangannya (pada Tugas Akhir ini, lapangan yang dimaksud adalah $\mathbb{C}$) disebut fungsional linear. Berikut adalah definisi formal dari fungsional linear.

Definisi III.4.2: Fungsional Linear

Misalkan A aljabar-C. Suatu fungsional adalah pemetaan* $\phi : A \to \mathbb{C}$. *Bila* ϕ *bersifat linear, yaitu:*

i) $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y); \forall x, y \in A$,

ii) $\phi(kx) = k(\phi(x)); \forall x \in A$ *dan skalar* k *di* £ ,

maka ϕ *disebut fungsional linear.*

Definisi III.4.3: Fungsional Linear Positif [1]

Misalkan A aljabar-C unital. Fungsional linear* $\phi : A \to \mathbb{C}$ *disebut fungsional linear positif bila* $\phi(a) \geq 0$; $\forall a \in A^+$.

Contoh III.4.4: [1]

Misalkan A suatu aljabar-C* unital, π representasi dari A pada suatu ruang Hilbert H, dan e suatu vektor unit di H.

Definisikan $\phi : A \to \mathbb{C}$ dengan

$$\phi(a) = \langle \pi(a)e | e \rangle .$$

Akan ditunjukkan bahwa ϕ adalah fungsional linear positif, dan $\phi(1) = 1$.

i) Akan ditunjukkan bahwa ϕ adalah pemetaan.

Ambil $a_1 = a_2 \in A$.

Karena π pemetaan, maka $\pi(a_1) = \pi(a_2)$.

Akibatnya $\langle \pi(a_1)e | e \rangle = \langle \pi(a_2)e | e \rangle$. Dengan kata lain $\phi(a_1) = \phi(a_2)$.

Jadi, ϕ adalah pemetaan (fungsional).

ii) Akan ditunjukkan bahwa ϕ linear.

Misalkan $a_1, a_2 \in A$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\phi(a_1 + a_2) &= \langle \pi(a_1 + a_2)e | e \rangle \\
&= \langle (\pi(a_1) + \pi(a_2))e | e \rangle \\
&= \langle \pi(a_1)e + \pi(a_2)e | e \rangle \\
&= \langle \pi(a_1)e | e \rangle + \langle \pi(a_2)e | e \rangle \\
&= \phi(a_1) + \phi(a_2).
\end{aligned}$$

Jadi, $\phi(a_1 + a_2) = \phi(a_1) + \phi(a_2)$ (III.4.4.1)

$$\begin{aligned}
\text{Selanjutnya, } \phi(\alpha a_1) &= \langle \pi(\alpha a_1)e | e \rangle \\
&= \langle \alpha \pi(a_1)e | e \rangle \\
&= \alpha \langle \pi(a_1)e | e \rangle \\
&= \alpha \phi(a_1).
\end{aligned}$$

Jadi, $\phi(\alpha a_1) = \alpha \phi(a_1)$ (III.4.4.2)

Dapat disimpulkan dari (III.4.4.1) dan (III.4.4.2) bahwa ϕ adalah linear.

iii) Akan ditunjukkan bahwa ϕ positif.

Berdasarkan Teorema III.3.2, misalkan $a \in A^+ \Rightarrow a = b^* b$ untuk suatu b di A.

$$\phi(a) = \phi(b^*b)$$

$$= \langle \pi(b^*b)e | e \rangle$$

$$= \langle \pi(b)^* \pi(b)e | e \rangle$$

$$= \langle \pi(b)e | \pi(b)e \rangle$$

$$= \|\pi(b)e\|^2 \geq 0.$$

Jadi, ϕ positif.

Berdasarkan i), ii), dan iii), maka $\phi : A \to \mathbb{C}$ dengan $\phi(a) = \langle \pi(a)e | e \rangle$ adalah suatu fungsional linear positif.

iv) Akan ditunjukkan bahwa $\phi(1) = 1$.

$$\phi(1) = \langle \pi(1)e | e \rangle$$

$$= \langle 1.e | e \rangle$$

$$= \langle e | e \rangle$$

$$= \|e\|^2$$

$$= 1. \qquad (e \text{ unit di } H)$$

Jadi, $\phi(1) = 1$.

Proposisi III.4.5: CBS (Cauchy-Bunyakowskii-Schwarz) [1]

Misalkan ϕ adalah fungsional linear positif pada suatu aljabar-C A, maka*

$$|\phi(y^*x)|^2 \leq \phi(y^*y)\phi(x^*x) \ ; \ \forall x, y \in A.$$

Proposisi III.4.5 akan sangat berguna untuk mengkaji sifat norm dari fungsional linear positif pada sistem operator. Adapun bukti dari proposisi ini dapat dilihat pada [1].

III.5 Sistem Operator

Definisi III.5.1: Subruang

Misalkan H ruang Hilbert. Himpunan $V \subseteq H$ *disebut subruang* (*atau manifold linear*) *apabila memenuhi*

1) $x + y \in V; \forall x, y \in V$,

2) $\alpha x \in V; \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{C}$.

Definisi III.5.2: Sistem Operator pada *B*(*H*)

Misalkan H ruang Hilbert. V disebut sistem operator apabila V subruang dari B(*H*) *yang memenuhi:*

1) $\forall v \in V \Rightarrow v^* \in V$,

2) V memuat operator identitas.

Misalkan *S* subset dari suatu aljabar-*C** *A*. Kemudian kita definisikan himpunan

$$S^* = \{a^* : a \in S\},$$

dan *S* dikatakan self-adjoint apabila *S** = *S*.

Definisi III.5.3: Sistem Operator pada Aljabar-*C** [1]

Suatu sistem operator adalah subruang S pada aljabar-C sedemikian sehingga* $1 \in S$ *dan S* = S.*

Dalam pengertian lain, S disebut sistem operator apabila S adalah subruang dari aljabar-C dengan sifat:*

1) $s^* \in S; \forall s \in S$,

2) *S mempunyai identitas 1.*

Contoh III.5.4: Keterkaitan Aljabar-*C dengan Sistem Operator**

Setiap aljabar-*C** unital adalah sistem operator.

Berdasarkan Teorema II.9.3 bahwa setiap aljabar-*C** adalah subaljabar-*C** dari *B*(*H*). Hal ini berarti aljabar-*C** juga merupakan subruang dari *B*(*H*). Selanjutnya, karena aljabar-*C** unital tertutup terhadap involusi, maka dapat disimpulkan bahwa aljabar-*C** unital adalah suatu sistem operator.

Beranjak dari Proposisi III.3.5, terdapat suatu fakta yang berkaitan dengan *a* suatu unsur hermitian dari *S,* yakni $\|a\|.1 \pm a \in S^+$ dan $a = \frac{1}{2}(\|a\|.1 + a) - \frac{1}{2}(\|a\|.1 - a)$. Artinya setiap unsur hermitian dari suatu sistem operator adalah selisih dari dua buah unsur positif. Hal ini dinyatakan pada [1] dan [7] .

Proposisi III.5.5: [1]

Misalkan S suatu sistem operator dan misalkan $f : S \to \mathbb{C}$ *adalah fungsional linear positif, maka f terbatas dan* $\|f\| = f(1)$.

<u>Bukti</u>:

$f : S \to \mathbb{C}$ suatu fungsional linear positif, artinya $f(a) \geq 0;\ \forall a \in S^+$.

Berdasarkan pembahasan pada sistem operator apabila *a* suatu unsur hermitian dari *S* maka $\|a\|.1 \pm a \in S^+$. Akibatnya $\|a\|.f(1) \pm f(a) = f(\|a\|.1 \pm a) \geq 0$. Karena $f(1) \geq 0$ maka $|f(a)| \leq \|a\|.f(1)$.

Pada kasus lain apabila kita tinjau secara umum, misalkan $a \in S$ maka

$$
\begin{aligned}
|f(a)|^2 &= |f(1.a)|^2 && \text{(operasi pada aljabar-}C^*\text{)} \\
&\leq f(1^*1)\, f(a^*a) && \text{(CBS)} \\
&= f(1)\, f(a^*a) \\
&\leq f(1)\|a^*a\|\, f(1) && \text{(karena } a^*a \text{ hermitian)} \\
&= f(1)^2 \|a^*a\| \\
&= f(1)^2 \|a\|^2. && \text{(sifat pada aljabar-}C^*\text{)}
\end{aligned}
$$

Artinya $|f(a)| \leq f(1)\|a\|$.

Hal ini menunjukkan bahwa *f* terbatas.

Selanjutnya $\|f\| = \sup\{|f(a)| : \|a\| \leq 1\}$, sehingga

$$\|f\| = \sup\{|f(a)| : \|a\| \leq 1\} \leq \sup\{f(1)\|a\| : \|a\| \leq 1\}$$

$$= f(1)\sup\{\|a\| : \|a\| \leq 1\}$$

$$= f(1).$$

Artinya $\|f\| \leq f(1)$. (III.5.5.1)

Perhatikan bahwa $f(1) = |f(1)| \leq \|f\|$, karena $\|1\| = 1 \leq 1$. (III.5.5.2)

Dari (III.5.5.1) dan (III.5.5.2) dapat disimpulkan bahwa $\|f\| = f(1)$. □

III.6 Pemetaan Positif dari Sistem Operator

Definisi III.6.1: Pemetaan Positif dari Aljabar-*C** [6] dan [2]

Misalkan A dan B aljabar-C. Suatu pemetaan positif antara A dan B adalah pemetaan linear* $\phi : A \to B$ *sedemikian sehingga* $\phi(a) \geq 0$ *di mana* $a \in A^+$, $\phi(A^+) \subseteq B^+$.

Definisi III.6.2: Pemetaan Positif dari Sistem Operator [1]

Misalkan A dan B aljabar-C dan S adalah sistem operator pada A. Suatu pemetaan positif antara S dan B adalah pemetaan linear* $\phi : S \to B$ *sedemikian sehingga* $\phi(a) \geq 0$ *di mana* $a \in S^+$, $\phi(S^+) \subseteq B^+$.

Dengan pengertian lain pada [7], *suatu pemetaan positif memetakan unsur-unsur positif dari S ke unsur-unsur positif dari B.*

Misalkan S adalah suatu sistem operator dan $\phi : S \to B$ adalah pemetaan positif, $a \in S$ dan $a = a^*$. Karena setiap unsur hermitian dari S adalah selisih dari dua unsur positif, maka

$$\phi(a) = \phi\left(\frac{1}{2}(\|a\|.1 + a) - \frac{1}{2}(\|a\|.1 - a)\right) = \frac{1}{2}\phi\left((\|a\|.1 + a) - (\|a\|.1 - a)\right)$$

$$\phi(a^*) = \phi\left(\left(\frac{1}{2}(\|a\|.1 + a) - \frac{1}{2}(\|a\|.1 - a)\right)^*\right)$$

$$= \frac{1}{2}\phi\left((\|a\|.1 + a)^* - (\|a\|.1 - a)^*\right)$$

$$= \frac{1}{2}\phi\left((\|a\|.1 + a) - (\|a\|.1 - a)\right)$$

$$\therefore \phi(a^*) = \phi(a).$$

Selanjutnya

$$\phi(a^*) = \frac{1}{2}\phi\left((\|a\|.1 + a) - (\|a\|.1 - a)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\phi(\|a\|.1 + a) - \phi(\|a\|.1 - a)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((\phi(\|a\|.1 + a))^* - (\phi(\|a\|.1 - a))^*\right) \quad \text{(karena } \phi(\|a\|.1 \pm a) \subseteq B^+ \text{)}$$

$$= \frac{1}{2}(\phi(\|a\|.1 + a))^* - \frac{1}{2}(\phi(\|a\|.1 - a))^*$$

$$= \left(\phi\left(\frac{1}{2}\|a\|.1 + a\right)\right)^* - \left(\phi\left(\frac{1}{2}\|a\|.1 - a\right)\right)^*$$

$$= \left(\phi\left(\frac{1}{2}\|a\|.1 + a\right) - \phi\left(\frac{1}{2}\|a\|.1 - a\right)\right)^*$$

$$= (\phi(a))^*$$

$$= \phi(a)^*$$

$$\therefore \phi(a^*) = \phi(a)^*.$$

Telah diketahui bahwa suatu fungsional linear positif pada suatu sistem operator adalah terbatas dan normnya adalah $\|\phi\| = \phi(1)$. Hal yang sama tidak sepenuhnya benar bagi suatu pemetaan positif.

Proposisi III.6.3: [1] dan [7]

Misalkan S suatu sistem operator dan $\phi : S \to B$ *adalah pemetaan positif, maka* ϕ *adalah terbatas dan* $\|\phi\| \leq 2\|\phi(1)\|$.

Bukti:

Misalkan p unsur positif dari *S*, maka $0 \leq p \leq \|p\|.1$ dan $0 \leq \phi(p) \leq \|p\|.\phi(1)$. Diperoleh $\|\phi(p)\| \leq \|p\|.\|\phi(1)\|$ apabila $p \geq 0$.

Selanjutnya jika p_1 dan p_2 positif, maka $\|p_1 - p_2\| \leq \max\{\|p_1\|, \|p_2\|\}$. Misalkan *h* unsur hermitian di *S*, maka $h = \frac{1}{2}(\|h\|.1 + h) - \frac{1}{2}(\|h\|.1 - h)$ dan dapat diperoleh pula $\phi(h) = \frac{1}{2}\phi(\|h\|.1 + h) - \frac{1}{2}\phi(\|h\|.1 - h)$. Hal ini berarti bahwa $\phi(h)$ dapat ditulis sebagai selisih dari dua buah unsur positif di *B*. Jadi, $\|\phi(h)\| \leq \frac{1}{2}\max\{\|\phi(\|h\|.1 + h)\|, \|\phi(\|h\|.1 - h)\|\}$.

Jika yang maksimum adalah $\frac{1}{2}\|\phi(\|h\|.1 + h)\|$, maka

$$\|\phi(h)\| \leq \frac{1}{2}\|\phi(\|h\|.1+h)\|$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\|h\|.1+h\|\|\phi(1)\|$$

$$\leq \frac{1}{2}(\|\|h\|.1\|+\|h\|)\|\phi(1)\|$$

$$= \|h\|\|\phi(1)\|.$$

Jika yang maksimum adalah $\frac{1}{2}\|\phi(\|h\|.1-h)\|$, maka

$$\|\phi(h)\| \leq \frac{1}{2}\|\phi(\|h\|.1-h)\|$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\|h\|.1-h\|\|\phi(1)\|$$

$$\leq \frac{1}{2}(\|\|h\|.1\|+\|-h\|)\|\phi(1)\|$$

$$= \frac{1}{2}(\|\|h\|.1\|+\|h\|)\|\phi(1)\|$$

$$= \|h\|\|\phi(1)\|.$$

$$\therefore \|\phi(h)\| \leq \frac{1}{2}\max\{\|\phi(\|h\|.1+h)\|, \|\phi(\|h\|.1-h)\|\} \leq \|h\|.\|\phi(1)\|.$$

Kemudian misalkan a adalah sembarang unsur dari *S*, maka $a = h + ik$ dengan $\|h\|, \|k\| \leq \|a\|$, $h = h^*, k = k^*$.

Akibatnya $\phi(a) = \phi(h+ik) = \phi(h) + \phi(ik)$, dan

$$\|\phi(a)\| = \|\phi(h) + \phi(ik)\|$$

$$\leq \|\phi(h)\| + \|\phi(ik)\|$$

$$= \|\phi(h)\| + |i|\,\|\phi(k)\|$$

$$= \|\phi(h)\| + \|\phi(k)\|$$

$$\leq \|h\|.\|\phi(1)\| + \|k\|.\|\phi(1)\|$$

$$= (\|h\| + \|k\|).\|\phi(1)\|$$

$$\leq (\|a\| + \|a\|).\|\phi(1)\|$$

$$= 2\|a\|.\|\phi(1)\|.$$

Artinya $\|\phi(a)\| \leq 2\|a\|.\|\phi(1)\|$.

Perhatikan bahwa $\|\phi\| = \sup\{\|\phi(a)\| : \|a\| \leq 1\}$

$$\leq \sup\{2\|a\|\|\phi(1)\| : \|a\| \leq 1\}$$

$$= 2\|\phi(1)\| \sup\{\|a\| : \|a\| \leq 1\}$$

$$= 2\|\phi(1)\|.$$

Jadi, norm dari pemetaan positif adalah $\|\phi\| \leq 2\|\phi(1)\|$. □