BAB III

PENAKSIR KUADRAT TERKECIL PADA PROSES AUTOREGERSIF

Setelah model sementara untuk runtun waktu univariat diidentifikasi, langkah selanjutnya adalah mencari taksiran terbaik atau paling efisien untuk parameter yang ada pada model tersebut. Namun sebelum membahas lebih jauh tentang penaksiran parameter dengan menggunakan Metode Kuadrat Terkecil, akan disajikan terlebih dahulu penaksiran parameter dengan menggunakan Metode Kemungkinan Maksimum. Hal ini perlu karena kedua metode ini saling berkaitan.

3.1 Penaksir Kemungkinan Maksimum

Untuk sembarang himpunan data runtun waktu $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, fungsi kemungkinan ***L*** didefinisikan sebagai fungsi kepadatan peluang bersama dari parameter-parameter model jika data pengamatan diketahui. Pada model AR, ***L*** adalah fungsi dari ϕ dan σ^2, jika diberikan data runtun waktu $Z_1, Z_2, ..., Z_n$. Metode penaksir kemungkinan maksimum adalah metode penaksiran parameter yang memaksimumkan fungsi kemungkinan ***L***, sehingga taksiran yang didapat dari metode ini menghasilkan nilai yang mirip dengan data sebenarnya.

Pandang model AR(p) :

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \phi_2 \dot{Z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \dot{Z}_{t-p} + a_t \qquad (3\text{-}1)$$

Dimana $\dot{Z}_t = Z_t - \mu$ dan $\{a_t\}$ adalah peubah acak yang diasumsikan mengikuti proses *white noise*, yang bebas dan berdistribusi normal dengan rerata nol dan variansi σ_a^2. Fungsi kepadatan peluang bersama dari $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah :

$$(2\pi\sigma_a^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{t=1}^{n} a_t^2 \right) \qquad (3\text{-}2)$$

Dari persamaan (3-1), kita dapat menuliskan a_t dalam bentuk :

$$a_t = \dot{Z}_t - \phi_1 \dot{Z}_{t-1} - \phi_2 \dot{Z}_{t-2} - \ldots - \phi_p \dot{Z}_{t-p} \qquad (3\text{-}3)$$

Misal **Z** = $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)'$ dan kondisi awal **Z*** = $(Z_{1-p}, \ldots, Z_{-1}, Z_0)'$ dan **a*** = $(a_{1-q}, \ldots, a_{-1}, a_0)'$, maka dengan mensubtitusikan (3-3) ke (3-2), akan diperoleh fungsi kemungkinan atas parameter ϕ, μ dan σ_a^2, yaitu :

$$L(\phi, \mu, \sigma_a^2) = (2\pi\sigma_a^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_a^2} S_*(\phi, \mu) \right) \qquad (3\text{-}4)$$

sehingga fungsi log kemungkinannya adalah :

$$\ln L(\phi, \sigma_a^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma_a^2) - \frac{S_*(\phi, \mu)}{2\sigma_a^2} \qquad (3\text{-}5)$$

dimana $S_*(\phi, \mu) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2 \quad (\phi, \mu \mid \mathbf{Z^*}, \mathbf{a^*}, \mathbf{Z})$ (3-6) adalah fungsi jumlah kuadrat tak bersyarat. Besaran $\hat{\phi}, \hat{\mu}$ yang memaksimumkan (3-5) disebut penaksir kemungkinan maksimum tak bersyarat. Karena $\ln L(\phi, \sigma_a^2)$ meliputi data melalui $S_*(\phi, \mu)$, berarti memaksimumkan fungsi $\ln L(\phi, \sigma_a^2)$ sama dengan meminimumkan $S_*(\phi, \mu)$.

Untuk mengidentifikasikan kondisi awal **Z*** dan **a***, kita dapat mengganti Z_1 yang tidak diketahui dengan rerata sampel $\bar{Z}$ dan a_1 yang tidak diketahui dengan nilai ekspektasinya yaitu nol. Dapat juga diasumsikan $a_p = a_{p-1} = ... = a_{p+1-q} = 0$ dan hitung a_t untuk $t \geq p+1$ pada persamaan (3-3). Sehingga fungsi jumlah kuadrat tak bersyarat (3-6) menjadi :

$$S_*(\phi, \mu) = \sum_{t=p+1}^{n} a_t^2 \quad (\phi, \mu \mid \mathbf{Z}) \tag{3-7}$$

Untuk fungsi log kemungkinan bersyarat memiliki bentuk yang sama dengan fungsi log kemungkinan tak bersyarat. Bedanya, $S_*(\hat{\phi}, \hat{\mu})$ dianggap merupakan fungsi jumlah kuadrat bersyarat, yaitu :

$$S_c(\phi, \mu) = \sum_{t=-\infty}^{n} \left(E(a_t \mid \phi, \mu, \mathbf{Z})\right)^2 \tag{3-9}$$

3.2 Penaksir Kuadrat Terkecil

Pada pembahasan sebelumnya, kita tahu bahwa $\ln L(\phi, \sigma_a^2)$ meliputi data melalui $S_*(\phi, \mu)$, berarti memaksimumkan fungsi $\ln L(\phi, \sigma_a^2)$ sama dengan meminimumkan $S_*(\phi,\mu)$, dimana $S_*(\phi,\mu)$ adalah fungsi jumlah kuadrat sesatan. Dengan kata lain penaksiran parameter dengan menggunakan Metode Kemungkinan Maksimum memberikan hasil yang sama dengan menggunakan Metode Kuadrat Terkecil. Dasar dari Metode Kuadrat Terkecil adalah meminimumkan jumlah kuadrat sesatan (JKS) sehingga diperoleh parameter yang tak bias. Penggunaan metode kuadrat terkecil dalam menaksir parameter model AR ini diharapkan mampu menghasilkan nilai parameter terbaik dan efisien.

3.2.1 Penaksir Kuadrat Terkecil Tak Bersyarat Pada AR(1)

Pandang kembali model AR(p) :

$$Z_t - \mu = \phi_1(Z_{t-1} - \mu) + \phi_2(Z_{t-2} - \mu) + \ldots + \phi_p(Z_{t-p} - \mu) + a_t$$

dimana $\{a_t\} \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma_a^2)$ adalah peubah acak yang diasumsikan mengikuti proses *white noise*. Metode penaksir kuadrat terkecil meminimumkan jumlah kuadrat dari selisih :

$$(Z_t - \mu) - \phi_1(Z_{t-1} - \mu) - \phi_2(Z_{t-2} - \mu) - \ldots - \phi_p(Z_{t-p} - \mu) \qquad (3\text{-}10)$$

Jika diberikan sederetan pengamatan atau data runtun waktu $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ maka kita hanya dapat menjumlahkan dari $t = p+1$ sampai $t = n$, sehingga diperoleh:

$$S_c(\phi,\mu)=\sum_{t=p+1}^{n}\left((Z_t-\mu)-\phi_1(Z_{t-1}-\mu)-\phi_2(Z_{t-2}-\mu)-...-\phi_p(Z_{t-p}-\mu)\right)^2 \qquad (3\text{-}11)$$

yang biasa disebut fungsi jumlah kuadrat tak bersyarat.

Berdasarkan prinsip kuadrat terkecil, ϕ dan μ ditaksir dengan meminimumkan fungsi jumlah kuadrat tersebut.

Misalkan model AR(1) :

$$Z_t-\mu=\phi(Z_{t-1}-\mu)+a_t$$

Sehingga fungsi jumlah kuadrat tak bersyaratnya adalah

$$S(\phi,\mu)=\sum_{t=2}^{n}\left((Z_t-\mu)-\phi(Z_{t-1}-\mu)\right)^2$$

Untuk menaksir μ, perhatikan persamaan $\frac{\partial S}{\partial\mu}=0$, maka didapatkan :

$$\frac{\partial S}{\partial\mu}=2\sum_{t=2}^{n}\left((Z_t-\mu)-\phi(Z_{t-1}-\mu)\right)(-1+\phi)=0$$

Diselesaikan untuk μ sehingga didapatkan :

$$\mu=\frac{\sum_{t=2}^{n}Z_t-\phi\sum_{t=2}^{n}Z_{t-1}}{(n-1)(1-\phi)} \qquad (3\text{-}12)$$

Untuk n yang besar, $\sum_{t=2}^{n}\frac{Z_t}{n-1}\approx\sum_{t=2}^{n}\frac{Z_{t-1}}{n-1}\approx\bar{Z}$

Sehingga persamaan (3-12) menjadi :

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{Z} - \phi\bar{Z}}{1-\phi} = \bar{Z} \qquad (3\text{-}13)$$

Untuk menaksir ϕ, $S(\phi, \bar{Z})$ diminimumkan terhadap ϕ sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial S(\phi, \bar{Z})}{\partial \phi} = -2\sum_{t=2}^{n}\left((Z_t - \bar{Z}) - \phi(Z_{t-1} - \bar{Z})\right)(Z_{t-1} - \bar{Z}) = 0$$

Diselesaikan untuk ϕ sehingga diperoleh :

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(Z_t - \bar{Z}\right)\left(Z_{t-1} - \bar{Z}\right)}{\sum_{t=2}^{n}\left(Z_{t-1} - \bar{Z}\right)^2} \qquad (3\text{-}14)$$

Dapat disimpulkan bahwa penaksir kuadrat terkecil tak bersyarat untuk proses AR(1) adalah $\hat{\mu} = \bar{Z}$ dan $\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(Z_t - \bar{Z}\right)\left(Z_{t-1} - \bar{Z}\right)}{\sum_{t=2}^{n}\left(Z_{t-1} - \bar{Z}\right)^2}$

3.2.2 Penaksir Kuadrat Terkecil Bersyarat Pada AR(1)

Salah satu fungsi yang paling penting dari sebuah model runtun waktu ialah dapat meramalkan nilai di masa yang akan datang. Secara alamiah, timbul juga pertanyaan apakah kita dapat meramalkan kembali atau *backcast* nilai-nilai $\mathbf{Z}_{\#} = (Z_{1-P}, \ldots, Z_{-1}, Z_0)'$ dan $\boldsymbol{a}_{\#} = (a_{1-q}, \ldots, a_{-1}, a_0)'$ di masa lalu yang tidak diketahui namun nilai-nilai tersebut diperlukan dalam perhitungan. Tentu saja hal ini bisa dilakukan karena untuk model AR(p) manapun dapat ditulis dalam bentuk maju

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2 \ldots -\phi_p B^p)\dot{Z}_t = a_t \qquad (3\text{-}15)$$

atau dalam bentuk mundur

$$(1-\phi_1 F-\phi_2 F^2 \ldots -\phi_p F^p)\dot{Z}_t = e_t \qquad (3\text{-}16)$$

Dimana $F^j Z_t = Z_{t+j}$. Karena sifat stasioneritasnya, persamaan (3-15) dan (3-16) haruslah memiliki struktur autokovariansi yang sama. Hal ini mengakibatkan bahwa $\{e_t\} \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma_a^2)$ adalah peubah acak yang mengikuti proses *white noise*. Sehingga, kita dapat menggunakan bentuk maju (3-15) untuk meramalkan nilai masa depan Z_{n+j} untuk $j>0$ yang tidak diketahui berdasarkan pada data runtun waktu $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$. Kita juga dapat menggunakan bentuk mundur (3-16) untuk meramal kembali atau *backcast* nilai Z_j dan a_j di masa lalu yang tidak diketahui berdasarkan pada data $(Z_n, Z_{n-1}, \ldots, Z_1)$. Pada pembahasan sebelumnya, telah disebutkan bahwa fungsi jumlah kuadrat bersyarat adalah:

$$S_c(\phi,\mu) = \sum_{t=-\infty}^{n} \left(E(a_t \mid \phi,\mu,\mathbf{Z}) \right)^2$$

Dalam prakteknya, persamaan di atas dapat disajikan sebagai hasil pendekatan dengan bentuk terbatas

$$S_c(\phi,\mu) = \sum_{t=-M}^{n} \left(E(a_t \mid \phi,\mu,\mathbf{Z}) \right)^2 \qquad (3\text{-}17)$$

dimana M adalah bilangan bulat yang cukup besar sedemikian sehingga $\left|E(Z_t \mid \phi, \mu, \mathbf{Z}) - E(Z_{t-1} \mid \phi, \mu, \mathbf{Z})\right| < \tau$, dengan τ adalah nilai yang cukup kecil yang telah ditetapkan sebelumnya.

Untuk memahami metode *backcasting*, perhatikan model AR(1) yang dapat ditulis dalam bentuk maju

$$a_t = Z_t - \phi_1 Z_{t-1} \tag{3-18}$$

atau ekivalen dengan bentuk mundur

$$e_t = Z_t - \phi Z_{t+1} \tag{3-19}$$

Dimana, tanpa kehilangan generalisasinya, kita asumsikan bahwa $E(e_t) = 0$. Misalkan ada 10 data runtun waktu yakni $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, ..., Z_{10})$, seperti tertulis pada tabel 3.1 dibawah kolom Z_t untuk $t = 1, 2, ..., 10$. Misalkan $\phi = 0,3$ dan kita ingin menghitung jumlah kuadrat bersyarat

$$S_c(\phi = 0,3) = \sum_{t=-M}^{10} \left(E(a_t \mid \phi = 0,3\ , \mathbf{Z}) \right)^2 \tag{3-20}$$

Misalkan dipilih $\tau = 0,005$ maka $\left|E(Z_t \mid \phi = 0,3, \mathbf{Z}) - E(Z_{t-1} \mid \phi = 0,3, \mathbf{Z})\right| < 0,005$. Untuk menyederhanakan notasi pada contoh ini kita tulis $E(a_t \mid \phi = 0,3\ , \mathbf{Z})$ dengan $E(a_t \mid \mathbf{Z})$ dan $E(Z_t \mid \phi = 0,3\ , \mathbf{Z})$ dengan $E(Z_t \mid \mathbf{Z})$.

Untuk memperoleh $E(a_t \mid \mathbf{Z})$ kita gunakan (3-18), sehingga

$$E(a_t \mid \mathbf{Z}) = E(Z_t \mid \mathbf{Z}) - \phi E(Z_{t-1} \mid \mathbf{Z}) \qquad (3\text{-}21)$$

Akan tetapi, perhitungan $E(a_t \mid \mathbf{Z})$ untuk $t \le 1$ meliputi nilai Z_t yang tidak diketahui untuk $t \le 0$, yang mana terlebih dahulu perlu untuk diramalkan kembali. Untuk mencapainya, digunakan bentuk mundur dalam (3-19), yaitu :

$$E(Z_t \mid \mathbf{Z}) = E(e_t \mid \mathbf{Z}) + \phi E(Z_{t+1} \mid \mathbf{Z}) \qquad (3\text{-}22)$$

Pertama, dicatat bahwa dalam bentuk mundur, e_t untuk $t \le 0$ merupakan "goncangan acak" masa depan data runtun waktu $Z_t, Z_{t-1}, ..., Z_2, Z_1$. Sehingga,

$$E(e_t \mid \mathbf{Z}) = 0 \ \text{ untuk } \ t \le 0 \qquad (3\text{-}23)$$

Oleh karena itu, dengan mensubtitusikan nilai $\phi = 0,3$ pada persamaan (3-22), diperoleh :

$$E(Z_0 \mid \mathbf{Z}) = E(e_0 \mid \mathbf{Z}) + 0,3E(Z_1 \mid \mathbf{Z}) = 0 + (0,3)(-0,2) = -0,06$$

$$E(Z_{-1} \mid \mathbf{Z}) = E(e_{-1} \mid \mathbf{Z}) + 0,3E(Z_0 \mid \mathbf{Z}) = 0 + (0,3)(-0,06) = -0,018$$

$$E(Z_{-2} \mid \mathbf{Z}) = E(e_{-2} \mid \mathbf{Z}) + 0,3E(Z_{-1} \mid \mathbf{Z}) = 0 + (0,3)(-0,018) = -0,0054$$

$$E(Z_{-3} \mid \mathbf{Z}) = E(e_{-3} \mid \mathbf{Z}) + 0,3E(Z_{-2} \mid \mathbf{Z}) = 0 + (0,3)(-0,0054) = -0,00162$$

Karena $\left| E(Z_{-3} \mid \mathbf{Z}) - E(Z_{-2} \mid \mathbf{Z}) \right| = 0,00378 < 0,005$,yaitu nilai τ yang telah ditetapkan, kita pilih $M = 2$.

Sekarang, dengan nilai backcast Z_t untuk $t \le 0$, kita dapat kembali ke bentuk maju pada persamaan (3-21) untuk menghitung $E(a_t \mid \mathbf{Z})$ dengan $\phi = 0,3$ dari $t = -2$ hingga $t = 10$. Diperoleh :

$$E(a_{-2} \mid \mathbf{Z}) = E(Z_{-2} \mid \mathbf{Z}) - 0,3E(Z_{-3} \mid \mathbf{Z}) = -0,0054 - (0,3)(-0,00162) = -0,0049$$

$$E(a_{-1} \mid \mathbf{Z}) = E(Z_{-1} \mid \mathbf{Z}) - 0,3E(Z_{-2} \mid \mathbf{Z}) = -0,018 - (0,3)(-0,0054) = -0,0164$$

$$E(a_0 \mid \mathbf{Z}) = E(Z_0 \mid \mathbf{Z}) - 0,3E(Z_{-1} \mid \mathbf{Z}) = -0,06 - (0,3)(-0,018) = -0,0546$$

$$E(a_1 \mid \mathbf{Z}) = E(Z_1 \mid \mathbf{Z}) - 0,3E(Z_0 \mid \mathbf{Z}) = -0,2 - (0,3)(-0,06) = -0,182$$

$$E(a_2 \mid \mathbf{Z}) = E(Z_2 \mid \mathbf{Z}) - 0,3E(Z_1 \mid \mathbf{Z}) = -0,4 - (0,3)(-0,2) = -0,34$$

$$\vdots$$

$$E(a_{10} \mid \mathbf{Z}) = E(Z_{10} \mid \mathbf{Z}) - 0,3E(Z_9 \mid \mathbf{Z}) = -0,2 - (0,3)(-0,1) = -0,17$$

Semua perhitungan di atas secara sistematik dapat disajikan pada tabel 3.1 dan diperoleh :

$$\begin{aligned} S_c(\phi = 0,3) &= \sum_{t=-2}^{10} \left(E(a_t \mid \phi = 0,3\ , \mathbf{Z}) \right)^2 \\ &= (-0,0049)^2 + (-0,0164)^2 + \ldots + (-0,17)^2 = 0,8232 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dari nilai ϕ yang berbeda kita dapat memperoleh nilai $S_c(\phi)$ lainnya dan mencari nilai minimumnya. Nilai ϕ yang menghasilkan

$S_c(\phi)$ minimum, merupakan nilai $\hat{\phi}$ yang efisien dan nilai ϕ inilah yang digunakan untuk peramalan selanjutnya.

Tabel 3.1

Perhitungan $S(\phi = 0.3)$ menggunakan metode *backcasting*

t	Z_t	$E(a_t \mid \boldsymbol{Z})$	$-0,3E(Z_{t-1} \mid \boldsymbol{Z})$	$E(Z_t \mid \boldsymbol{Z})$	$0,3E(Z_{t+1} \mid \boldsymbol{Z})$	$E(e_t \mid \boldsymbol{Z})$
-3				-0.0016	-0.0016	0
-2		-0.0049	0.0005	-0.0054	-0.0054	0
-1		-0.0164	0.0016	-0.018	-0.018	0
0		-0.0546	0.0054	-0.06	-0.06	0
1	-0.2	-0.182	0.018	-0.2		
2	-0.4	-0.34	0.06	-0.4		
3	-0.5	-0.38	0.12	-0.5		
4	-0.5	-0.35	0.15	-0.5		
5	-0.6	-0.45	0.15	-0.6		
6	-0.5	-0.32	0.18	-0.5		
7	-0.4	-0.25	0.15	-0.4		
8	-0.2	-0.08	0.12	-0.2		
9	-0.1	-0.04	0.06	-0.1		
10	-0.2	-0.17	0.03	-0.2		