BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Integral Lebesgue merupakan suatu perluasan dari integral Riemann. Sebagaimana telah diketahui, pengkonstruksian integral Riemann dilakukan dengan cara pemartisian domain suatu fungsi yang berbentuk interval menjadi subinterval-subinterval, yang kemudian ditentukan limit jumlah Riemann atas dan jumlah Riemann bawah dari fungsi tersebut. Berbeda dengan integral Riemann, integral Lebesgue dari suatu fungsi terukur didefinisikan berdasarkan pendekatan fungsi sederhana. Pengkonstruksiannya dilakukan dengan cara pemartisian range dari fungsi terukur Lebesgue yang bernilai tak negatif ke dalam berhingga buah subinterval, kemudian ditetapkan sebuah nilai dari setiap subinterval tersebut untuk merepresentasikan nilai-nilai dari barisan fungsi sederhana yang mendekati fungsi terukur tersebut. Cara seperti itu menunjukkan bahwa setiap fungsi terukur tak negatif dapat didekati oleh suatu fungsi sederhana.

Kajian tentang ruang fungsi terintegralkan telah banyak dipelajari. Pada umumnya, kajian tersebut membahas sifat-sifat dasar sampai dengan kekonvergenan barisan pada ruang tersebut. Pada karya tulis ini, akan dibahas ruang L^p yang memuat semua kelas ekivalen dari fungsi-fungsi terukur Lebesgue. Berdasarkan perbedaan nilai p, pendefinisian L^p beserta normnya dibagi menjadi dua bagian, yaitu untuk $1 \leq p < \infty$ dan $p = \infty$. Untuk $1 \leq p < \infty$, norm pada L^p didefinisikan berdasarkan integral Lebesgue, sedangkan untuk $p = \infty$

(selanjutnya disebut L^{∞}), norm pada L^{∞} didefinisikan sebagai supremum essensial dari fungsi di dalamnya.

Sifat-sifat yang akan dikaji pada ruang L^p dimotivasi oleh pembahasan sifat-sifat yang berlaku pada ruang l^p yang merupakan kumpulan barisan skalar dengan norm yang didefinisikan berdasarkan jumlahan dan supremum dari barisan-barisan didalamnya. Kajian yang menarik dari ruang l^p adalah bahwa ruang tersebut merupakan ruang Banach, yaitu ruang Norm yang memenuhi sifat kelengkapan. Dalam pembuktian bahwa ruang l^p adalah ruang Norm, diperlukan ketaksamaan Holder dan Minkowski. Namun, ketaksamaan-ketaksamaan tersebut hanya berlaku untuk $1 \leq p \leq \infty$, sedangkan untuk $0 < p < 1$, kedua ketaksamaan tersebut tidak berlaku. Kemudian khusus untuk $p = 2$, l^p merupakan ruang Hilbert yaitu ruang Banach dengan Norm yang diinduksi dari hasil kali dalamnya.

Pada karya tulis ini pertama-tama akan dikaji mengenai pengkonstruksian integral Lebesgue beserta beberapa sifatnya. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah L^p merupakan ruang Banach dan ruang Hilbert dengan kondisi-kondisi yang serupa pada l^p. Selain itu akan dikaji pula mengenai kekonvergenan barisan dan beberapa sifat pada ruang Banach L^p. Terakhir, akan dikaji fungsional linear terbatas pada L^p, khususnya kajian tentang Teorema Representasi Riesz.

1.2 Rumusan dan Batasan masalah

Dalam karya tulis ini pertama-tama akan dibahas mengenai ukuran Lebesgue dan fungsi terukur Lebesgue berserta sifat-sifatnya. Selanjutnya akan

didefinisikan integral Lebesgue dari fungsi-fungsi khusus yang terukur Lebesgue yang akan digunakan untuk mengkonstruksi integral Lebesgue untuk fungsi umum yang terukur. Selanjutnya integral Lebesgue beserta sifat-sifatnya akan digunakan dalam pembahasan ruang L^p beserta sifat-sifat yang berlaku di dalamnya.

Rumusan masalah yang akan dikaji dalam karya tulis ini adalah :

a. Bagaimana pengkonstruksian integral Lebesgue dan sifat-sifat apa saja yang berlaku pada integral Lebesgue?
b. Bagaimana pendefinisian dari ruang L^p dan sifat-sifat dasar apa saja yang berlaku pada ruang tersebut?
c. Kondisi apa yang harus dipenuhi agar L^p menjadi sebuah ruang Banach dan ruang Hilbert?
d. Bagaimana kekonvergenan pada ruang Banach L^p dan sifat-sifat apa saja yang berlaku pada ruang tersebut?
e. Bagaimana fungsional linear terbatas di dalam ruang L^p?

Adapun pada karya tulis ini, materi yang disajikan terbatas pada pembahasan kelas-kelas ruang L^p, sifat-sifat ruang Banach L^p, dan fungsional terbatas pada ruang L^p.

1.3 Tujuan penulisan

Tujuan penulisan karya tulis ini adalah untuk :

a. Mempelajari pengkonstruksian integral Lebesgue dan mengetahui sifat-sifat yang berlaku pada integral Lebesgue.

b. Mendeskripsikan kelas-kelas pada ruang L^p dan sifat-sifat dasar yang berlaku pada ruang tersebut.

c. Mengetahui kondisi yang harus dipenuhi agar L^p menjadi sebuah ruang Banach dan ruang Hilbert.

d. Mempelajari konsep kekonvergenan pada ruang Banach L^p dan mengetahui sifat-sifat yang berlaku pada ruang tersebut.

e. Mempelajari fungsional linear terbatas pada ruang L^p.

1.4 Sistematka Penulisan

Sistematika penulisan karya ilmiah ini antara lain :

1. BAB I (Pendahuluan), pada bab ini dibahas mengenai latar belakang masalah, rumusan dan batasan masalah, tujuan masalah, dan sistematika penulisan.
2. BAB II (Dasar Teori), pada bab ini dibahas dasar-dasar teori yang mendukung pembahasan ruang L^p, di antaranya adalah teori himpunan, fungsi, ruang Vektor, ruang Metrik, ruang Banach, ruang Hilbert, kekonvergenan dari barisan bilangan real dan barisan fungsi bernilai real, ukuran Lebesgue, dan fungsi terukur Lebesgue beserta beberapa sifatnya.
3. BAB III (Integral Lebesgue untuk Fungsi-fungsi Terukur Lebesgue), pada bab ini dibahas mengenai definisi dari fungsi-fungsi khusus yang terukur Lebesgue diantaranya fungsi karakteristik, fungsi sederhana, dan didefinisikan bagian positif dan negatif dari sebuah fungsi. Selanjutnya pada bab ini akan dikaji integral Lebesgue dari fungsi-fungsi khusus yang

terukur, fungsi terukur tak negatif, dan fungsi terukur yang lebih umum beserta beberapa sifat dasarnya.

4. BAB IV (Ruang L^p), pada bab ini akan dibahas mengenai pendefinisian dari ruang L^p beserta beberapa sifatnya, ketaksamaan Holder, ketaksamaan Minkowski beserta kebalikannya . Di sini juga dijelaskan kondisi apa saja yang harus terpenuhi agar ruang L^p menjadi sebuah ruang Banach dan ruang Hilbert. Kemudian akan dibahas juga sifat-sifat dari L^p, diantaranya kekonvergenan dalam rata-rata dan fungsional linear terbatas pada L^p.
5. BAB V (Penutup), bab ini memberikan kesimpulan dari keseluruhan isi karya tulis ini beserta saran penulis mengenai pembahasan ruang L^p.