

BAB III

GENERALIZED SPACE TIME AUTOREGRESSIVE

3.1 Indeks Gini

Model GSTAR adalah salah satu model yang banyak digunakan untuk memodelkan dan meramalkan data deret waktu dan lokasi. Model ini merupakan pengembangan model STAR yang diperkenalkan oleh Pfeifer dan Deutsch. Karena model STAR hanya dapat digunakan untuk lokasi-lokasi yang serba homogen, maka untuk lokasi-lokasi yang heterogen, Ruchjana (2002) mengembangkan model STAR menjadi GSTAR.

Untuk mengkaji keheterogenan lokasi diperkenalkan suatu indeks (Indeks Gini) oleh seorang statistikawan Italia, *Corrado Gini* (1884-1965) yang dapat digunakan untuk membandingkan suatu perubahan dari periode ke periode atau dari lokasi ke lokasi, sehingga data yang digunakan dapat berupa data time series atau data spasial (lokasi).

Indeks Gini adalah suatu koefisien yang menunjukkan tingkat ketidakmerataan suatu distribusi. Untuk mengkuantifikasi ketidakmerataan suatu pengamatan.

a. Perumusan Hipotesis

H_0 : Lokasi Homogen (kemerataan sempurna)

H_1 : Lokasi Heterogen (kemerataan tidak sempurna)

b. Besaran yang digunakan

y : nilai variabel yang diamati

\bar{y} : rata-rata nilai variabel yang diamati

n : ukuran sampel

N : banyak variabel yang diamati

i : indeks sampel

c. Statistik Uji

$$G = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{(n^2 \bar{y}_i)} \times \sum_i^N y_i \quad (3.1)$$

d. Kriteria Pengujian

Tolak H_0 jika indeks Gini mempunyai nilai 1 (satu).

e. Kesimpulan

H_0 ditolak atau diterima.

3.2 Model Generalized Space Time Autoregressive Orde 1

Model STAR dan GSTAR merupakan model VAR yang dibatasi parameternya. Perbedaan mendasar antara model STAR dan GSTAR adalah pengasumsian parameternya. Parameter pada model STAR tidak bergantung pada lokasi, artinya ϕ_{10} dan ϕ_{11} bernilai sama untuk semua lokasi, sehingga model ini hanya sesuai untuk lokasi-lokasi dengan karakteristik homogen. Pada model GSTAR, parameter model berubah untuk setiap lokasi sehingga terbentuk matriks diagonal dengan parameter ϕ_{10} dan ϕ_{11} . Model GSTAR merupakan perluasan

dari model STAR sehingga kajian GSTAR(1₁) juga perluasan dari model STAR(1₁).

Model GSTAR(1₁) untuk setiap lokasi $i = 1, 2, \dots, N$ dan waktu t dinyatakan oleh

$$z_i(t) = \phi_{10}^{(i)} z_i(t-1) + \phi_{11}^{(i)} \sum_j^N W_{ij} z_j(t-1) + \varepsilon_i(t) \quad (3.2)$$

Dalam notasi matriks, model di atas dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{z}(t) = [\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\phi}_1 \mathbf{W}] \mathbf{z}(t-1) + \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (3.3)$$

Dimana,

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \\ \vdots \\ \varepsilon_N(t) \end{bmatrix}, \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & \cdots & W_{1N} \\ W_{21} & 0 & \cdots & W_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N1} & W_{N2} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

dengan

$$\sum_{j=1}^N W_{ij} = 1$$

3.3 Kestasioneran Model GSTAR(1₁)

Model GSTAR, khususnya GSTAR(1₁) merupakan model versi terbatas dari model VAR (Borovkova dkk., 2002 dan Ruchjana, 2003). Oleh sebab itu, kondisi stasioneritas dari model GSTAR dapat diturunkan dari kondisi stasioneritas model VAR.

Teorema

Jika $\phi_{10}^{(i)}$ dan $\phi_{11}^{(i)}$ memenuhi $|\phi_{10}^{(i)} + \phi_{11}^{(i)}| \leq 1$ dan $|\phi_{10}^{(i)} - \phi_{11}^{(i)}| \leq 1$ untuk setiap $i=1,2,\dots,N$ maka GSTAR(1₁) stasioner.

Teorema ini memberikan syarat cukup kestasioneran model GSTAR(1₁) (Ruchjana, 2002).

Bukti:

Bentuk VAR(1) dari model GSTAR(1₁) dinyatakan dalam persamaan

$$\mathbf{z}(t) = [\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\phi}_1 \mathbf{W}] \mathbf{z}(t-1) + \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (3.4)$$

Dapat direpresentasikan dalam model VAR(1) yaitu

$$\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\phi} \mathbf{z}(t-1) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)$$

Dengan

$$\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\phi}_1 \mathbf{W}] \quad (3.5)$$

Sehingga jika solusi dari λ yang memenuhi persamaan

$$|I_n \lambda^p - [\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\phi}_1 \mathbf{W}]| = 0 \quad (3.6)$$

Terletak dalam lingkaran satuan ($|\lambda| < 1$), maka GSTAR(1₁) stasioner.

Jika λ adalah solusi dari persamaan di atas, maka paling sedikit untuk satu lokasi $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ berlaku:

$$|\lambda - \phi_{10}^{(i)}| \leq |\phi_{11}^{(i)}| \quad (3.7)$$

Dengan mengkuadratkan kedua sisi persamaan di atas diperoleh:

$$(\lambda - \phi_{10}^{(i)})^2 \leq (\phi_{11}^{(i)})^2$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\phi_{10}^{(i)} + (\phi_{10}^{(i)})^2 - (\phi_{11}^{(i)})^2 \leq 0$$

Dengan

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\phi_{10}^{(i)} \pm \sqrt{(2\phi_{10}^{(i)})^2 - 4((\phi_{10}^{(i)})^2 - (\phi_{11}^{(i)})^2)}}{2}$$

Atau

$$\lambda_{1,2} = \phi_{10}^{(i)} \pm \phi_{11}^{(i)}$$

Karena $|\lambda| \leq 1$, maka $|\phi_{10}^{(i)} \pm \phi_{11}^{(i)}| \leq 1$. Sehingga untuk setiap $i=1,2,\dots,N$ berlaku

$$|\phi_{10}^{(i)} + \phi_{11}^{(i)}| \leq 1 \text{ dan } |\phi_{10}^{(i)} - \phi_{11}^{(i)}| \leq 1 \quad (3.8)$$

Ini merupakan syarat cukup GSTAR(1₁) stasioner.

3.4 Fungsi Autokorelasi GSTAR(1₁)

Karakteristik fungsi autokorelasi model GSTAR(1₁) adalah sama dengan model STAR(1₁), yaitu menurun secara signifikan (*tail off*).

Berikut ini adalah autokorelasi GSTAR(1₁) pada berbagai lag:

Untuk $k=0$ dan $l=0$

$$\begin{aligned} \rho_{00}^{(i)}(1) &= \frac{\text{tr}[\Gamma(1)]}{[\text{tr}[\Gamma(0)]\text{tr}[\Gamma(0)]]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\text{tr}[\phi_{10}^{(i)}\sigma_z^2 I + \phi_{11}^{(i)}\sigma_z^2 I W' + \sigma_{\varepsilon(i)}^2 I]}{\text{tr}[\sigma_{\varepsilon(i)}^2 I]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{00}^{(i)}(2) &= \frac{\text{tr}[\Gamma(2)]}{[\text{tr}[\Gamma(0)]\text{tr}[\Gamma(0)]]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\text{tr}[\phi_{10}^{(i)}\Gamma(1) + \phi_{11}^{(i)}\Gamma(1)W']}{[\text{tr}[\Gamma(0)]\text{tr}[\Gamma(0)]]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\frac{1}{N}\text{tr}[\phi_{10}^{(i)}\Gamma(1)] + \frac{1}{N}\text{tr}[\phi_{11}^{(i)}\Gamma(1)W']}{\frac{1}{N}[\text{tr}[\sigma_{\varepsilon^{(i)}}^2]]} \\
&= \frac{\phi_{10}^{(i)}\gamma_{00}(1) + \phi_{11}^{(i)}\gamma_{10}(1)}{\gamma_{00}(0)}
\end{aligned}$$

dan seterusnya.

Secara umum ditulis

$$\rho_{00}^{(i)}(s) = \begin{cases} \frac{\gamma_{00}(1)}{\gamma_{00}(0)} & ; \text{untuk } s = 1 \\ \frac{\phi_{10}^{(i)}\gamma_{00}(s-1) + \phi_{11}^{(i)}\gamma_{10}(s-1)}{\gamma_{00}(0)} & ; \text{untuk } s = 2, 3, \dots, t \end{cases} \quad (3.9)$$

Untuk $k = 0$ dan $l = 1$

$$\begin{aligned}
\rho_{10}^{(i)}(1) &= \frac{\text{tr}[W\Gamma(1)]}{[\text{tr}[W'W\Gamma(0)]\text{tr}[\Gamma(0)]]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\phi_{10}^{(i)}(1)}{(\gamma_{11}(0)\gamma_{00}(0))^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\rho_{10}^{(i)}(2) = \frac{\text{tr}[W\Gamma(2)]}{[\text{tr}[W'W\Gamma(0)]\text{tr}[\Gamma(0)]]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\phi_{10}^{(i)} \gamma_{10}(1) + \phi_{11}^{(i)} \gamma_{11}(1)}{(\gamma_{11}(0) \gamma_{00}(0))^{\frac{1}{2}}}$$

dan seterusnya.

Secara umum ditulis

$$\rho_{10}^{(i)}(s) = \begin{cases} \frac{\gamma_{10}(1)}{\gamma_{11}(0) \gamma_{00}(0)} & ; \text{ untuk } s = 1 \\ \frac{\phi_{10}^{(i)} \gamma_{01}(s-1) + \phi_{11}^{(i)} \gamma_{10}(s-1)}{(\gamma_{11}(0) \gamma_{00}(0))^{\frac{1}{2}}} & ; \text{ untuk } s = 2, \dots, t \end{cases} \quad (3.10)$$

Untuk $k = 1$ dan $l = 1$

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{(i)}(1) &= \frac{\text{tr}[W'W\Gamma(1)]}{[\text{tr}[W'W\Gamma(0)]]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\gamma_{11}(1)}{\gamma_{11}(0)} \\ \rho_{11}^{(i)}(1) &= \frac{\text{tr}[W'W\Gamma(2)]}{[\text{tr}[W'W\Gamma(0)]]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\gamma_{11}(2)}{\gamma_{11}(0)} \end{aligned}$$

dan seterusnya.

Secara umum ditulis

$$\rho_{11}^{(i)}(s) = \frac{\gamma_{11}(s)}{\gamma_{11}(0)}; \text{ untuk } s = 1, 2, \dots, t \quad (3.11)$$

3.5 Fungsi Autokorelasi Parsial GSTAR(1₁)

Karakteristik fungsi autokorelasi model GSTAR(1₁) adalah sama dengan model STAR(1₁), yaitu terputus (*cut off*) pada selang waktu $s=1$ dan spasial lag $l=1$.

Berikut ini adalah fungsi autokorelasi parsial GSTAR(1₁):

Spasial lag = 0

Untuk $s = 1$, $\gamma_{00}(1) = \phi_{10}\gamma_{00}(0)$

$$\phi_{10}^{(i)} = \frac{\gamma_{00}(1)}{\gamma_{00}(0)} \quad (3.12)$$

Spasial lag = 1

untuk $s = 1$, $\gamma_{10}(1) = \phi_{10}^{(i)}\gamma_{10}(0) + \phi_{11}^{(i)}\gamma_{11}(0)$

$$\phi_{11}^{(i)} = \frac{\gamma_{10}(1) - \phi_{10}^{(i)}\gamma_{10}(0)}{\gamma_{11}(0)} \quad (3.13)$$

3.6 Penaksiran Parameter

Penaksiran parameter model GSTAR dapat dilakukan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil dengan meminimumkan jumlah kuadrat galatnya.

Persamaan

$$z_i(t) = \phi_{10}^{(i)}z_i(t-1) + \phi_{11}^{(i)} \sum_j^N W_{ij}z_j(t-1) + \varepsilon_i(t)$$

Untuk $t = 1, 2, \dots, T$ memberikan model linear lokasi $i = 1, 2, \dots, N$ sebagai:

$$\vec{z}_i = \mathbf{X}_i\beta_i + \mathbf{e}_i \quad (3.14)$$

dengan,

$$\vec{z}_i = \begin{bmatrix} z_i(1) \\ z_i(2) \\ \vdots \\ z_i(T) \end{bmatrix}_{(T \times 1)}, \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} z_i(0) & v_i(0) \\ z_i(1) & v_i(1) \\ \vdots & \vdots \\ z_i(T-1) & v_i(T-1) \end{bmatrix}_{T \times 2}, \beta_i = \begin{bmatrix} \phi_{10}^{(i)} \\ \phi_{11}^{(i)} \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$\text{dan } \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} e_i(1) \\ e_i(2) \\ \vdots \\ e_i(T) \end{bmatrix}_{(T \times 1)}$$

dimana

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^N W_{ij} z_j(t) \quad (3.15)$$

Untuk $t=0,1,\dots,T$

Sehingga untuk keseluruhan lokasi memiliki bentuk linier sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} z_1(1) \\ z_1(2) \\ \vdots \\ z_1(T) \\ \vdots \\ z_N(1) \\ z_N(2) \\ \vdots \\ z_N(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(0) & v_1(0) & \dots & 0 \\ z_1(1) & v_1(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1(T-1) & v_1(T-1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_N(0) \\ 0 & 0 & \dots & z_N(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_N(T-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{10}^{(1)} \\ \phi_{11}^{(1)} \\ \phi_{10}^{(2)} \\ \phi_{11}^{(2)} \\ \vdots \\ \phi_{10}^{(N)} \\ \phi_{11}^{(N)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1(1) \\ e_1(2) \\ \vdots \\ e_1(T) \\ \vdots \\ e_N(1) \\ e_N(2) \\ \vdots \\ e_N(T) \end{bmatrix}$$

Bentuk di atas disederhanakan menjadi:

$$\vec{z}_{(NT \times 1)} = \mathbf{X}_{(NT \times 2N)} \beta_{(2N \times 1)} + \mathbf{e}_{(NT \times 1)} \quad (3.16)$$

Penaksir dari β yaitu $\hat{\beta} = (\hat{\phi}_{10}^{(1)}, \hat{\phi}_{11}^{(1)}, \dots, \hat{\phi}_{10}^{(N)}, \hat{\phi}_{11}^{(N)})'$. Kuadrat terkecil parameter

$\hat{\beta}$ diberikan oleh persamaan

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{X}'\vec{z} \quad (3.17)$$

Sehingga

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\vec{z} \quad (3.18)$$

Yang memiliki solusi tunggal apabila matriks $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ adalah matriks non singular.

3.7 Bobot Lokasi

Karakteristik model space time adalah adanya korelasi dalam waktu maupun lokasi. Korelasi antar lokasi direpresentasikan melalui matriks bobot W . Para peneliti model space time biasanya menentukan bobot berdasarkan karakteristik fisik, misalnya : luas wilayah, kepadatan penduduk, batas antara dua lokasi dan sarana transportasi. Umumnya dilakukan standarisasi, sehingga salah satu syarat dari matriks bobot adalah jumlah semua entri pada setiap baris sama dengan satu dan diasumsikan bahwa bobot suatu lokasi terhadap dirinya sendiri bernilai nol.

Salah satu permasalahan pada model GSTAR adalah pemilihan dan penentuan bobot lokasi. Beberapa cara penentuan bobot lokasi yang telah digunakan dalam aplikasi model GSTAR adalah (Borovkova dkk.,2002; dalam Ruchjana, 2002) yaitu bobot seragam, bobot biner, bobot inverse jarak, dan bobot normalisasi korelasi silang. Pada Tugas akhir ini hanya akan digunakan dua buah bobot yaitu:

a. Bobot Seragam

Bobot ini ditentukan berdasarkan banyaknya tetangga terdekat dalam suatu kelompok lokasi tertentu (lag spasial). Secara matematis dinyatakan:

$$w_{ij}^{(l)} = \frac{1}{n_i^{(l)}}, \text{ dengan } n_i^{(l)} \text{ adalah banyaknya lokasi yang berdekatan dengan lokasi } i$$

pada lag spasial l .

b. Bobot dengan Normalisasi Korelasi Silang

Bobot ini menggunakan hasil normalisasi korelasi silang antara lokasi pada lag waktu yang bersesuaian (Suhartono, 2007:116).

Secara umum korelasi silang antara dua variabel atau antar lokasi ke- i dan ke- j pada lag waktu ke- k . $\text{Kor}[z_i(t), z_j(t-k)]$, didefinisikan sebagai (Box dkk., 1994; Wei, 1990)

$$\rho_{ij}(k) = \frac{\gamma_{ij}(k)}{\sigma_i \sigma_j}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dengan $\gamma_{ij}(k)$ adalah kovarians silang antara kejadian di lokasi ke- i dan ke- j .

Taksiran dari korelasi silang ini pada data sampel adalah:

$$r_{ij}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^n [z_i(t) - \bar{z}_i][z_j(t-k) - \bar{z}_j]}{\sqrt{\left(\sum_{t=1}^n [z_i(t) - \bar{z}_i]^2\right)\left(\sum_{t=1}^n [z_j(t) - \bar{z}_j]^2\right)}} \quad (3.19)$$

Selanjutnya, metode penentuan bobot lokasi baru yang diperkenalkan Suhartono dan Subanar (2006b) adalah melalui normalisasi dari besaran-besaran korelasi silang antar lokasi pada waktu yang bersesuaian. Proses ini secara umum menghasilkan bobot lokasi untuk model GSTAR(1₁) seperti berikut:

$$W_{ij}^{(1)} = \frac{r_{ij}(1)}{\sum_{k \neq 1} |r_{ik}(1)|}, i \neq j, k = 1, 2, \dots, p \quad (3.20)$$

Dan bobot ini memenuhi $\sum_{j \neq 1} |w_{ij}| = 1$.

3.8 Kecocokan Model

Untuk mencegah galat peramalan yang terlalu besar, harus dilakukan pengecekan terlebih dahulu terhadap model tersebut apakah sudah cocok atau belum untuk data tersebut. Langkah-langkah pengujiannya adalah sebagai berikut:

1. Uji Serentak dengan Uji-F

a. Perumusan hipotesis

$$H_0: \phi_{10}^{(i)} = \phi_{11}^{(i)} = 0$$

H_1 : sekurang – kurangnya ada $\phi_{kl}^{(i)} \neq 0$ dengan $k = 1, l = 0, 1$ dan $i = 1, 2, \dots, N$

b. Besaran-besaran yang diperlukan

MSR (*Mean squared residual*) = rata-rata kuadrat residual

$$MSE$$
 (*Mean squared error*) = $\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n z_{l+1}(T) - \hat{z}_l(T)$ (3.21)

dengan n merupakan banyak ramalan yang dilakukan.

c. Statistik uji

$$F_{hitung} = \frac{MSR}{MSE} \quad (3.22)$$

d. Kriteria pengujian

Dengan mengambil taraf nyata α , dk pembilang = $N \times N$, dan dk penyebut = n , maka dari tabel distribusi F diperoleh $F_{\alpha; (N \times N, n)}$

Jika $F_{hitung} > F_{tabel}$, maka H_0 ditolak.

e. Kesimpulan

Penafsiran dari H_0 ditolak atau diterima.

2. Uji Individu dengan Uji-t

a. Perumusan hipotesis

$$H_0: \phi_{1l}^{(i)} = 0 \quad (\text{parameter tidak signifikan})$$

$$H_1: \phi_{1l}^{(i)} \neq 0 \quad (\text{parameter signifikan})$$

dengan $l = 0,1$ dan $i = 1,2, \dots, N$

b. Besaran-besaran yang diperlukan

$$S(\phi_{10}^{(i)}) = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (z_i(t))^2}{n \sum_{i=1}^n (z_i(t) - \bar{z}_i(t))^2} \right\}^{1/2} \times \sigma \quad (3.23)$$

$$S(\phi_{11}^{(i)}) = \left\{ \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (z_i(t) - \bar{z}_i(t))^2} \right\}^{1/2} \quad (3.24)$$

Dimana

$\phi_{1l}^{(i)}$ = parameter dengan $l=0,1$ dan $i=1,2,\dots,N$

$S(\phi_{1l}^{(i)})$ = standar error untuk parameter dengan $l=0,1$ dan $i=1,2,\dots,N$

c. Statistik uji

$$t_{hitung} = \frac{|\phi_{1l}^{(i)}|}{S(\phi_{1l}^{(i)})} \quad (3.25)$$

d. Kriteria pengujian

Dengan mengambil taraf nyata α dan $dk = n$, maka dari tabel distribusi t diperoleh $t_{1-\frac{1}{2}\alpha;n}$.

jika $t_{hitung} > t_{tabel}$, maka H_0 ditolak.

e. Kesimpulan

Penafsiran dari H_0 ditolak atau diterima