

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Belajar matematika bisa mengembangkan kemampuan siswa untuk berpikir secara logis, rasional, kritis, akurat, jujur, efisien, dan efektif ketika menghadapi tantangan dalam memecahkan berbagai masalah. Hendriana, dkk (2017) Menguraikan bahwa pendekatan pembelajaran matematika di sekolah menekankan empat hal penting, yakni cara penyampaian materi, pengembangan pola pikir, lingkup pembahasan yang luas, dan tingkat abstraksi yang disesuaikan dengan pemahaman siswa sesuai tingkat perkembangan pengetahuannya. Lebih lanjut Samo, dkk. (2017) menjelaskan bahwa dalam penelitian bidang matematika, perhatian utamanya difokuskan pada kemampuan berpikir. Akan tetapi, pada umumnya, metode pembelajaran matematika di sekolah lebih berorientasi pada penggunaan rumus dan perhitungan, daripada memberikan penekanan yang cukup pada proses berpikir siswa (Suryadi & Suratno, 2014). Kondisi tersebut menyebabkan siswa mengalami kesulitan dalam memahami konsep-konsep dalam materi matematika.

Materi matematika pada tingkat sekolah menengah, sesuai dengan Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 21 Tahun 2016, mencakup topik seperti bilangan real, aljabar, geometri, suku bunga, matriks, vektor, induksi matematika, integral, dan logika. Peraturan tersebut juga menetapkan standar isi pembelajaran matematika, di mana siswa diharapkan untuk menggunakan pola untuk menjelaskan kecenderungan jangka panjang serta menerapkannya dalam konteks kehidupan nyata. Selain itu, siswa diharapkan juga memanfaatkan pemahaman tersebut dalam memecahkan masalah dan berargumentasi. Hal ini sesuai dengan karakteristik utama matematika, yaitu penalaran deduktif, yang menyatakan bahwa kebenaran suatu konsep atau pernyataan adalah akibat logis dari kebenaran sebelumnya. Oleh karena itu, kaitan antar konsep atau pernyataan dalam matematika bersifat konsisten. Ketika melakukan pembuktian matematika di tingkat sekolah menengah, siswa dihadapkan pada gabungan antara penalaran deduktif dan

induktif. Diharapkan bahwa siswa memiliki kemampuan berpikir secara deduktif, namun tetap mampu menggunakan pola pikir induktif dalam proses pembelajarannya (Rahmah, 2013). Pola pikir induktif yang diterapkan bertujuan untuk disesuaikan dengan tingkat perkembangan intelektual siswa. Di dalam materi matematika sekolah menengah, terdapat bagian yang memerlukan pendekatan berpikir deduktif, seperti halnya dalam materi induksi matematika.

Materi induksi matematika memerlukan kemampuan penalaran dan kecermatan siswa. Induksi matematika berhubungan dengan sifat-sifat dasar pada sistem bilangan asli, dan meskipun pembuktian yang terlibat terbatas pada tipe tertentu, namun sangatlah penting dan sering digunakan (Bartle & Sherber, 2011). Kemampuan membuktikan dalam matematika memiliki manfaat besar dalam melatih siswa dalam penalaran dan logika, yang sangat berguna untuk mengatasi masalah-masalah yang lebih kompleks dan memerlukan keterampilan berpikir tingkat tinggi. Berdasarkan Kurikulum 2013, induksi matematika sebelumnya diajarkan pada kelas XII sesuai dengan Permendikbud RI Nomor 59 Tahun 2014 tentang Kurikulum 2013 Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah. Namun, melalui perubahan yang terjadi melalui Permendikbud Nomor 37 Tahun 2018 tentang Perubahan Atas Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 24 Tahun 2016 tentang Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar Pelajaran pada Kurikulum 2013 pada Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah, materi induksi matematika kini diajarkan pada kelas XI. Oleh karena itu, menjadi jelas bahwa pemahaman dan penguasaan materi induksi matematika adalah suatu hal yang penting bagi siswa tingkat Sekolah Menengah Atas.

Materi induksi matematika dalam Kurikulum 2013 Revisi mencakup berbagai metode pembuktian pernyataan matematis yang melibatkan barisan, ketidaksamaan, dan keterbagian. Indikator pencapaian kecakapan dalam materi ini meliputi beberapa hal, yaitu: Menyajikan alasan atau bukti untuk suatu pernyataan matematis; Membuat dan memeriksa kebenaran dugaan (*conjecture*); Memverifikasi kesahihan atau kebenaran suatu argumen dengan menggunakan penalaran induksi; Menurunkan atau membuktikan rumus dengan menggunakan penalaran deduktif; Membuat dan memeriksa kebenaran dugaan (*conjecture*). Semua aspek tersebut sejalan dengan tujuan pembelajaran matematika yang

termaktub dalam Permendikbud RI Nomor 59 Tahun 2014 tentang Kurikulum 2013 Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah. Tujuan tersebut, antara lain, bertujuan agar peserta didik mampu mengkomunikasikan gagasan dan penalaran matematika serta dapat menyusun bukti matematika dengan menggunakan kalimat lengkap, simbol, tabel, diagram, atau media lain guna mengklarifikasi situasi atau masalah yang ada.

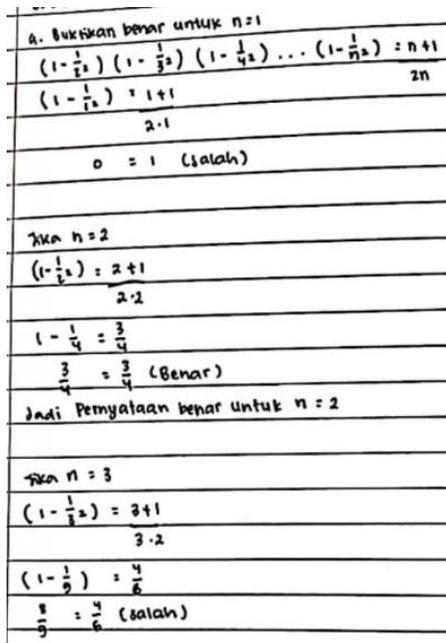
Peneliti melakukan studi pendahuluan kepada beberapa Siswa Kelas XI di salah satu Sekolah Menengah Atas di Jakarta Barat yang mana berdasarkan hasil wawancara dengan tutor diperoleh hasil bahwa mayoritas siswa gagal saat menyelesaikan soal pembuktian matematika menggunakan induksi matematika. Selanjutnya peneliti melakukan analisis terhadap hasil tes sumatif kelas XI materi induksi matematika, dan diperoleh hasil sedikit sekali siswa yang mampu menyelesaikan pembuktian dengan tuntas. Dari 18 siswa, hanya 1 yang memperoleh nilai di atas Kriteria Ketuntasan Minimal (KKM). Pada bagian berikut ini diberikan Tabel 1.1 berisi salah satu soal yang gagal diselesaikan oleh mayoritas siswa :

Tabel 1.1 Soal yang gagal diselesaikan siswa

No.	Soal Induksi
1.	<p>Tunjukkan dimulai dari n berapakah pernyataan $(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$ bernilai benar?</p> <p>Buktikanlah dengan menggunakan prinsip induksi matematika!</p>

Pada Tabel 1.1 diberikan permasalahan berkaitan dengan pembuktian menggunakan induksi matematika. Mayoritas siswa gagal dalam membuktikan pernyataan tersebut menggunakan induksi. Soal ini dapat diselesaikan oleh siswa dengan baik apabila siswa mampu memahami dengan baik mengenai konsep basis induksi, bahwa tidak semua nilai n dimulai dengan $n = 1$. Konsep basis induksi ini sangat penting karena merupakan langkah dasar dalam pembuktian menggunakan induksi matematika. Hal ini sejalan dengan penelitian (Ashkenazi & Itzkovitch, 2014), di mana mereka menyatakan bahwa materi induksi matematika yang dipelajari siswa tingkat sekolah menengah masih sangat terbatas dan ditemukan adanya ketidak lengkapan siswa dalam memahami konsep

mengenai makna basis induksi. Berikut merupakan hasil jawaban siswa pada langkah basis induksi pada Gambar 1.1 dan Gambar 1.2:



A. Buktikan benar untuk $n=1$

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

$$\left(1 - \frac{1}{1^2}\right) = \frac{1+1}{2 \cdot 1}$$

$$0 = 1 \text{ (salah)}$$

Jika $n=2$

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$$

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ (Benar)}$$

Jadi Pernyataan benar untuk $n=2$

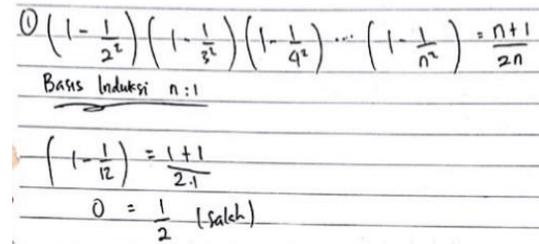
Jika $n=3$

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{3+1}{3 \cdot 2}$$

$$\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{4}{6}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{4}{6} \text{ (salah)}$$

Gambar 1.1
Jawaban Siswa A



$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Basis Induksi $n=1$

$$\left(1 - \frac{1}{1^2}\right) = \frac{1+1}{2 \cdot 1}$$

$$0 = \frac{1}{2} \text{ (salah)}$$

Gambar 1.2
Jawaban Siswa B

Berdasarkan hasil penyelesaian pembuktian menggunakan induksi matematika yang dituliskan oleh siswa A pada Gambar 1.1 dan siswa B pada Gambar 1.2 terlihat bahwa untuk langkah mensubstitusikan nilai $n = 1$, siswa A dan siswa B hanya mengganti nilai n di akhir pernyataan dengan 1, sehingga pada langkah basis induksi diperoleh kesimpulan kedua siswa menuliskan penyelesaian yang salah. Selanjutnya Siswa A melanjutkan percobaan pembuktiannya dengan mensubstitusikan nilai n selain 1 ke persamaan sehingga diperoleh kesimpulan beberapa jawaban salah dan beberapa jawaban lainnya benar. Lebih lanjut peneliti melakukan wawancara dan diperoleh hasil bahwa baik siswa A maupun siswa B belum mampu memahami konsep n yang dimaksud pada soal merupakan nilai ke n sehingga keduanya hanya mengganti nilai ke- n dengan n . Artinya terdapat miskonsepsi siswa terhadap makna bilangan n yang mana ini mengakibatkan kesalahan dalam proses penyelesaian masalah pembuktian matematika menggunakan induksi matematika. Sejalan dengan penelitian Fitriani, dkk. (2021) yang menyatakan bahwa faktor penyebab kesalahan siswa pada jenis kesalahan

konseptual adalah ketidakmampuan siswa untuk melampaui contoh soal yang diberikan, kurang pemahaman terhadap prinsip induksi matematika, dan kebingungan terhadap sifat perkalian perpangkatan. Akibat dari kesalahan mengenai dasar induksi ini, siswa akhirnya tidak dapat mencapai kesimpulan yang benar dalam pembuktian menggunakan induksi matematika.

Dalam proses pembelajaran, banyak siswa tingkat sekolah menengah mengalami kesulitan dalam menyelesaikan pembuktian matematika yang menggunakan induksi matematika. Kesalahan yang sering terjadi adalah karena siswa lebih terbiasa dengan jenis soal umum dan langkah penyelesaian yang bersifat prosedural. Ketika dihadapkan pada permasalahan yang tidak biasa, siswa cenderung mengalami kesulitan dalam menyelesaikan pembuktian pernyataan matematika menggunakan induksi matematika. Siswa yang tidak memiliki latar belakang matematika yang kuat secara teknis juga cenderung mengalami masalah dengan induksi matematika. Kekurangan pengetahuan teknis ini menyebabkan mereka sering membuat kesalahan teknis dan matematika secara rutin, yang akhirnya menyebabkan mereka gagal dalam membangun bukti dengan menggunakan induksi matematika (Michaelson, 2008). Masalah lain yang sering dihadapi siswa saat menyelesaikan soal induksi matematika adalah kesalahan dalam memahami konsep basis induksi. Mayoritas siswa meyakini bahwa langkah basis induksi dalam induksi matematika harus dimulai dari $n = 1$. Keyakinan ini dipengaruhi oleh beberapa buku yang digunakan dalam pembelajaran induksi matematika yang menyajikan langkah-langkah pembuktian secara singkat, yaitu (a) membuktikan basis induksi $P(1)$ benar; (b) mengasumsikan $P(k)$; (c) langkah pembuktian $P(k + 1)$. Namun, dalam kenyataannya, untuk langkah basis induksi, nilai n tidak harus selalu dimulai dari $n = 1$. Pandangan ini bertentangan dengan pernyataan oleh Larson & Pettersson (2018) yang menyatakan bahwa dalam soal-soal induksi yang umum, langkah basis induksi sering terkait dengan $n = 0$ atau $n = 1$, tetapi hal ini tergantung pada apa yang ingin dibuktikan. Variasi soal dapat disesuaikan dengan memilih titik awal (nilai n) yang sesuai atau bahkan memasukkan lebih dari satu angka dalam langkah basis induksi.

Banyak penelitian telah dilakukan untuk menjelaskan kesulitan siswa dalam menyelesaikan permasalahan matematika yang terkait dengan pembuktian

menggunakan induksi matematika. Penelitian pertama adalah penelitian yang dilakukan oleh Ernawati & Ilhamuddin (2020) diperoleh hasil Kesalahan konsep yang sering terjadi pada siswa dalam menyelesaikan pembuktian matematika menggunakan induksi matematika meliputi: Beberapa kesalahan umum yang dilakukan siswa dalam pembuktian adalah sebagai berikut: Siswa menuliskan jawaban yang tidak sesuai dengan konsep pembuktian untuk $n = 1$; Siswa keliru dalam mengganti n menjadi k dan n menjadi $k + 1$; Siswa menuliskan n yang seharusnya sudah diganti menjadi k ; Siswa keliru dalam menambahkan deret pada perubahan k menjadi $k + 1$; Siswa tidak melakukan pembuktian untuk $n = k + 1$. Fitriani, dkk. (2021) yang dalam penelitiannya, dilakukan analisis terhadap kesalahan yang dilakukan siswa SMA saat menggunakan konsep induksi matematika untuk membuktikan pernyataan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa terdapat beberapa jenis kesalahan yang umum terjadi, yaitu kesalahan konseptual, kesalahan prosedural, dan kesalahan teknis. Kesalahan konseptual terkait dengan pemahaman konsep secara keseluruhan, kesalahan prosedural terjadi pada langkah-langkah pelaksanaan pembuktian, dan kesalahan teknis berkaitan dengan kesalahan perhitungan atau penulisan. Ashkenazi & Itzkovitch (2014) Dalam hasil penelitiannya mengindikasikan bahwa siswa menghadapi tiga permasalahan utama ketika membuktikan pernyataan matematis menggunakan induksi matematika. Pertama, mereka mengalami kesulitan dalam memahami konsep bukti deduktif. Kedua, pemahaman mereka terhadap makna dan langkah-langkah basis induksi masih kurang lengkap. Dan ketiga, siswa juga menghadapi kesulitan dalam memahami proses kenaikan (yaitu proses pembuktian untuk semua bilangan asli n , maka kenaikannya adalah 1).

Berdasarkan penelitian pendahuluan dan tinjauan literatur, terlihat bahwa sebagian besar penelitian lebih fokus pada kesalahan dan kesulitan siswa dalam melakukan pembuktian matematika menggunakan induksi matematika. Namun, belum ada penelitian yang menyelidiki secara menyeluruh proses berpikir siswa dalam menyelesaikan pembuktian dengan menggunakan induksi matematika dan dampaknya terhadap pemahaman siswa terhadap pembuktian tersebut. Sampai saat ini, belum ditemukan penelitian yang melihat secara komprehensif bagaimana siswa berpikir dan memproses informasi saat menghadapi pembuktian

matematika menggunakan induksi matematika, serta bagaimana hal ini mempengaruhi cara mereka memahami metode pembuktian tersebut. Oleh karena itu peneliti merasa perlu untuk melakukan penelitian mengenai *Ways of Thinking* (WoT) dan *Ways of Understanding* (WoU) siswa dalam menyelesaikan masalah pembuktian menggunakan induksi matematika. *Ways of Understanding* (cara memahami) mencakup beberapa unsur seperti aksioma tertentu, definisi, teorema, bukti, masalah, dan solusi. Sementara itu, *Ways of Thinking* (cara berpikir) merujuk pada tindakan mental yang mengarah pada hasil kategori pertama, yaitu *Ways of Understanding*, seperti yang telah dijelaskan oleh (Nurhasanah dkk., 2021).

Analisis kemampuan dilakukan dengan menggunakan Teori Harel yang mencakup beberapa prinsip, antara lain: *Duality Principle*, yang memberikan gambaran menyeluruh tentang karakteristik dari *Ways of Thinking* dan *Ways of Understanding* siswa yang unik. *Necessity-principle*, yang mengidentifikasi kebutuhan intelektual apa saja yang dimiliki oleh siswa. *Repeated-reasoning principle*, yang berkaitan dengan proses internalisasi pengetahuan oleh siswa. *Interview Communication Map* (ICM), yang berfungsi sebagai kerangka eksplorasi cara berpikir dan cara memahami siswa.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan penjelasan di atas, permasalahan secara umum pada penelitian ini adalah :

1. Bagaimana *Ways of Thinking* siswa SMA dalam menyelesaikan masalah induksi matematika ?
2. Bagaimana *Ways of Understanding* siswa SMA dalam menyelesaikan masalah induksi matematika ?
3. Bagaimana keterkaitan antara *Ways of Understanding* dan *Ways of Thinking* siswa dalam menyelesaikan masalah induksi matematika ?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan pemahaman tentang *Ways of Thinking* (cara berpikir siswa), *Ways of Understanding* (cara memahami siswa) dan keterkaitan antara keduanya dalam menyelesaikan masalah pembuktian matematika dengan menggunakan induksi matematika berdasarkan Teori Harel.

1.4 Manfaat Penelitian

Secara Teoritis

Secara teoritis, penelitian ini diharapkan memberikan kontribusi signifikan pada perkembangan ilmu pengetahuan, terutama dalam memahami proses berpikir siswa SMA dan cara mereka memahami serta menyelesaikan soal induksi matematika. Selain itu, penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi yang berharga bagi peneliti lain yang tertarik untuk melaksanakan penelitian serupa di masa depan.

Secara Praktis

Secara praktis, penelitian ini diharapkan memiliki manfaat berikut:

1. Bagi siswa SMA, penelitian ini dapat membantu melatih mereka dalam menyelesaikan masalah matematis yang terkait dengan induksi matematika. Hal ini akan membantu meningkatkan pemahaman dan keterampilan mereka dalam materi tersebut.
2. Bagi guru, penelitian ini dapat menjadi alternatif model pembelajaran dalam memberikan pelajaran matematika kepada siswa SMA di kelas. Guru dapat menggunakan temuan penelitian ini sebagai panduan untuk mengembangkan strategi pengajaran yang lebih efektif dalam mengajarkan pembuktian menggunakan induksi matematika. Selain itu, penelitian ini juga dapat membantu guru dalam menganalisis kelemahan dan kekuatan penyelesaian masalah induksi matematis siswa, sehingga mereka dapat memberikan perhatian khusus pada area yang memerlukan perbaikan.
3. Bagi peneliti, penelitian ini diharapkan memberikan pengalaman dan wawasan yang berharga dalam menganalisis proses berpikir dan memahami siswa saat menyelesaikan masalah induksi matematika.

Temuan dari penelitian ini dapat menjadi dasar untuk mengembangkan desain didaktis yang lebih efektif dalam meningkatkan profesionalisme peneliti sebagai calon tenaga pendidik.