

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep “*factor set*” mula-mula muncul pada masalah perluasan grup. Misalkan terdapat grup H dan K , akan dicari perluasan G dari K oleh H dengan syarat bahwa G memuat subgrup normal K_1 dengan $K_1 \cong K$ dan $G/K_1 \cong H$. Contohnya hasil kali langsung $K \times H$ adalah suatu perluasan yang memenuhi syarat yaitu memuat subgrup normal $K_1 = K \times \{e_H\}$ dengan $K_1 \cong K$ dan $G/K_1 \cong H$.

Dalam Rotman (2003), masalah mencari perluasan G dari K oleh H tidak lain merupakan analisis barisan eksak dari grup homomorfisma

$$e \rightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \rightarrow e$$

Menurut Rotman, karena p homomorfisma onto maka analisis pada barisan eksak dari grup homomorfisma di atas menginduksi suatu fungsi baru yaitu $\ell: H \rightarrow G$ yang disebut dengan lifting (tidak harus homomorfisma) dengan syarat bahwa $p\ell = e_H$.

Jika G adalah perluasan dari K oleh H dengan K suatu H -modul maka *factor set* didefinisikan sebagai fungsi $f: H \times H \rightarrow K$ sedemikian sehingga memenuhi:

- i. $f(x, y) + f(xy, z) = xf(y, z) + f(x, yz)$, untuk setiap $x, y, z \in H$.
- ii. $f(1, y) = 0 = f(x, 1) \forall x, y, z \in H$, untuk setiap $x, y \in H$, di mana 0 identitas di K dan 1 identitas di H .

Selanjutnya, jika diasumsikan bahwa G adalah perluasan *realizes the operator* dari K oleh H serta pemilihan suatu lifting $\ell: H \rightarrow G$. Rotman menunjukkan karena lifting dikonstruksi dari suatu transversal dari K di G maka akan terdapat koset Kg pada K yaitu

$$Kg = a + \ell(x), \quad a \in K \text{ dan } x \in H$$

artinya g merepresentasikan $K + \ell(x)$ sebagai koset. Untuk setiap $x, y \in H$, maka $\ell(x) + \ell(y)$ dan $\ell(xy)$ keduanya merupakan representatif dari koset yang sama. Kemudian, jika terdapat suatu elemen $f(x, y) \in K$ yang merupakan image dari suatu fungsi $f: H \times H \rightarrow K$ sedemikian sehingga

$$\ell(x) + \ell(y) = f(x, y) + \ell(xy)$$

maka fungsi f pada persamaan di atas disebut sebagai *factor set* yang berasosiasi dengan lifting pada kondisi normal yaitu $\ell(1) = 0$.

Secara natural, suatu *factor set* pada perluasan *realizes the operator* bergantung kepada pemilihan lifting ℓ sebagai fungsi yang mempengaruhi keberadaan suatu *factor set*. *Factor set* dengan pemilihan lifting ℓ untuk $\ell(1) = 0$ ini disebut sebagai “*Factor set* yang Ternormalisasi (*The Normalized Factor set*).”

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam bagaimana konsep *factor set* dan *factor set* ternormalisasi pada perluasan G dari K oleh H dengan K suatu H -modul. Selain itu akan ditunjukkan bagaimana terkaitan antara *factor set* dengan *factor set* yang ternormalisasi tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dikaji dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konsep perluasan pada grup?
2. Bagaimana konsep lifting dan *factor set* dari masalah perluasan grup?
3. Bagaimana definisi *factor set* yang ternormalisasi pada perluasan *realizes the operator* dengan pemilihan lifting ℓ untuk $\ell(1) = 0$?
4. Apakah *factor set* yang ternormalisasi pada perluasan *realizes the operator* akan memenuhi sifat *factor set* secara umum pada perluasan $0 \rightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1$ dengan K suatu H -modul?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan yang ingin dicapai adalah:

1. Menelaah konsep perluasan pada grup.
2. Menelaah konsep lifting dan *factor set* dari masalah perluasan grup.
3. Menelaah definisi *factor set* yang ternormalisasi pada perluasan *realizes the operator* dengan pemilihan lifting ℓ untuk $\ell(1) = 0$.

4. Menelaah apakah *factor set* yang ternormalisasi pada perluasan *realizes the operator* memenuhi sifat pada *factor set* secara umum pada perluasan $0 \rightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1$ dengan K suatu H -modul.

1.4 Batasan Masalah

Kajian dalam tugas akhir ini dibatasi khusus untuk *factor set* pada perluasan $e \rightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \rightarrow e$ dengan K suatu H -modul dan *factor set* yang ternormalisasi pada perluasan *realizes the operator* dengan pemilihan lifting untuk $\ell(1) = 0$.