BAB 3
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dikaji dua bahasan utama yaitu lifting dari masalah perluasan grup sebagai konsep pendukung dan *factor set* yang ternormalisasi sebagai konsep utama pada tugas akhir ini.

3.1 Lifting dari Masalah Perluasan Grup

Lifting yang dibahas pada bab ini adalah lifting yang muncul dari masalah perluasan grup. Di mana pada sub bab ini akan dikaji beberapa konsep pendukung yang berkaitan langsung dengan lifting sebagai konsep untuk mengontruksi *factor set* yang ternormalisasi yang akan dikaji lebih lanjut pada sub bab selanjutnya.

Sebelum dikaji lebih jauh tentang lifting, akan diulas dahulu konsep perluasan pada grup sebagai konsep awal munculnya lifting.

3.1.1 Perluasan grup

Pada Teorema 2.5.1 disebutkan bahwa jika K dan H adalah grup maka $G = K \times H$ membentuk grup dengan operasi perkalian titik demi titik, untuk setiap $(k_1, h_1), (k_2, h_2) \in G$ maka $(k_1, h_1)(k_2, h_2) = (k_1 k_2, h_1 h_2) \in G$. Grup yang dihasilkan disebut hasilkali langsung dari K dan H. Dengan kata lain G merupakan perluasan grup dari K oleh H, di mana G memiliki subgrup normal K_1 dengan $K_1 \cong K$ dan $G/K_1 \cong H$. Rotman menguraikan bahwa perluasan grup ini juga merupakan cara membentuk barisan eksak pendek

$$e \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to e$$

yang disebut perluasan G dari K oleh H.

Berikut ini adalah definisi perluasan grup.

Definisi 3.1.1.1 Perluasan grup (Rotman, 2003: 785)

Misalkan K dan H adalah grup maka suatu perluasan *(extention)* dari K oleh H merupakan barisan eksak pendek

$$1 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1.$$

Berdasarkan Proposisi 2.3.2 maka $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} p$, dapat dikatakan bahwa grup G disebut sebagai suatu perluasan jika G memuat suatu subgrup normal $\operatorname{Im} i = \ker p = K_1$ dengan $K_1 \cong K$ dan $G/K_1 \cong H$, atau G dapat disebut grup middle G (yang bukan barisan eksak pendek) suatu perluasan jika memuat subgrup normal K_1 dengan $K_1 \cong K$ dan $G/K_1 \cong H$.

Definisi 3.1.1.2 Perluasan grup (Grillet, 2007: 95)

Suatu perluasan grup $K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H$ dari grup K oleh grup H yaitu grup G yang memuat homomorfisma satu-satu $i: K \to G$ dan homomorfisma onto $p: G \to H$ sedemikian sehingga $\text{Im}\, i = \text{Ker}\, p$.

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa perluasan grup G dari grup K oleh grup H merupakan barisan eksak pendek $1 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$ yang memuat subgrup normal $\text{Im}\, i = \ker p = K_1$ dengan $K_1 \cong K$ dan $G/K_1 \cong H$.

Contoh 3.1.1.3

Setiap grup G dengan subgrup normal K_1 adalah perluasan dari K_1 oleh G/K_1. Setiap diberikan sembarang grup K dan H, hasilkali langsung $G = K \times H$ adalah perluasan dari K oleh H. Jika $K_1 = K \times \{e_H\}$ adalah subgrup dari G, untuk membuktikan bahwa $G = K \times H$ adalah perluasan dari K oleh H, akan ditunjukkan bahwa:

1) $K \times \{e_H\} \lhd G$.

2) $K \times \{e_H\} \cong K$.

3) $G/K \times \{e_H\} \cong H$.

Bukti:

1) Akan ditunjukkan $K \times \{e_H\}$ subgrup normal dari G.

Sebelum ditunjukkan $K \times \{e_H\}$ subgrup normal dari G, terlebih dahulu akan ditunjukkan $K \times \{e_H\}$ subgrup dari G. Untuk menunjukkan bahwa $K \times \{e_H\}$ subgrup dari G, akan ditunjukkan bahwa:

(i) $K \times \{e_H\}$ adalah himpunan tak kosong.

Ambil elemen identitas $e_K \in K$, maka hasilkali langsung e_K dengan $e_H \in \{e_H\}$ adalah $(e_K, e_H) \in K \times \{e_H\}$. Sehingga setidaknya terdapat elemen identitas di $K \times \{e_H\}$.

Jadi, $K \times \{e_H\}$ adalah himpunan tak kosong.

(ii) $K \times \{e_H\}$ tertutup.

Ambil $(k_1, e_H), (k_2, e_H) \in K \times \{e_H\}$ dengan $k_1, k_2 \in K$ dan $e_H \in \{\,_H\}$ maka

$$(k_1, e_H)(k_2, e_H) = (k_1 k_2, e_H e_H) = (k_1 k_2, e_H)$$

di mana $k_1, k_2 \in K$ dan K grup, diperoleh $k_1 k_2 \in K$ dan $e_H \in \{e_H\}$ sehingga $(k_1, e_H)(k_2, e_H) \in K \times \{e_H\}$.

Jadi, $K \times \{e_H\}$ tertutup.

(iii) $K \times \{e_H\}$ memiliki invers.

Misalkan (x, y) adalah elemen invers di $K \times \{e_H\}$ dengan $x \in K$ dan $y \in \{e_H\}$. Akan dicari nilai x dan y sedemikian sehingga untuk setiap $(k, e_H) \in K \times \{e_H\}$ berlaku $(x, y)(k, e_H) = (e_k, e_H)$.

Perhatikan

$$(x,y)(k,e_H) = (xk, ye_H) = (e_k, e_H)$$

diperoleh $xk = e_k$ dan $ye_H = e_H$. Karena K dan $\{e_H\}$ grup, maka untuk setiap $x \in K$, $y \in \{e_H\}$ ada $k^{-1} \in K$, ${e_H}^{-1} = e_H \in \{e_H\}$ sedemikian sehingga $x = k^{-1}e_k = k^{-1}$ dan $y = {e_H}^{-1}e_H = {e_H}^{-1} = e_H$. Diperoleh elemen invers dari $K \times \{e_H\}$ yaitu $(x,y) = \left(k^{-1}, e_H\right) \in K \times \{e_H\}$.

Jadi, $\left(k^{-1}, e_H\right)$ elemen invers dari $K \times \{e_H\}$.

Dari (i), (ii) dan (iii), maka $K \times \{e_H\}$ merupakan subgrup dari $G = K \times H$……… (*).

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $K \times \{e_H\}$ adalah subgrup normal dari G yaitu sebagai berikut:

Untuk setiap $(k_i, e_H) \in K \times \{e_H\}$ dan $(k_j, h) \in K \times H$ maka

$$(k_j, h)(k_i, e_H)(k_j, h)^{-1} \in K \times \{e_H\}.$$

Pembuktian dilakukan untuk dua kasus, yaitu:

<u>Kasus 1 untuk $i = j$</u>

Perhatikan

$$\begin{aligned}(k_j,h)(k_i,e_H)(k_j,h)^{-1} &= (k_j,h)(k_j,e_H)(k_j,h)^{-1} \\ &= \left((k_j,h)(k_j,e_H)\right)(k_j,h)^{-1} \\ &= (k_jk_j, he_H)({k_j}^{-1}, h^{-1})\end{aligned}$$

$$= \left(k_j k_j, h\right)\left({k_j}^{-1}, h^{-1}\right)$$

$$= \left(k_j k_j {k_j}^{-1}, hh^{-1}\right)$$

$$= \left(k_j e_K, e_H\right)$$

$$= \left(k_j, e_H\right)$$

$$= (k, e_H).$$

Jadi, $\left(k_j, h\right)(k_i, e_H)\left(k_j, h\right)^{-1} \in K \times \{e_H\}$.

<u>Kasus 2 untuk $i \neq j$</u>

Perhatikan

$$\begin{aligned}(k_j, h)(k_i, e_H)\left(k_j, h\right)^{-1} &= \left(\left(k_j, h\right)(k_i, e_H)\right)\left(k_j, h\right)^{-1} \\ &= \left(k_j k_i, he_H\right)\left({k_j}^{-1}, h^{-1}\right) \\ &= \left(k_j k_i, h\right)\left({k_j}^{-1}, h^{-1}\right) \\ &= \left(k_j k_i {k_j}^{-1}, hh^{-1}\right) \\ &= \left(k_j k_i {k_j}^{-1}, e_H\right)\end{aligned}$$

Karena K grup, untuk setiap $k_j, k_i, {k_j}^{-1} \in K$ maka $k_j k_i {k_j}^{-1} \in K$, diperoleh $\left(k_j k_i {k_j}^{-1}, e_H\right) \in K \times \{e_H\}$. Akibatnya $\left(k_j, h\right)(k_i, e_H)\left(k_j, h\right)^{-1} \in K \times \{e_H\}$.

Dengan demikian dari (*) dan (**) maka $K \times \{e_H\}$ adalah subgrup normal dari $G = K \times H$.

2) Akan ditunjukkan $K \times \{e_H\}$ isomorfik terhadap K.

Definisikan suatu fungsi $\theta: K \times \{e_H\} \rightarrow K$ dengan $\theta\big((k, e_H)\big) = k$. Untuk menunjukkan bahwa $K \times \{e_H\}$ isomorfik terhadap K, akan ditunjukkan bahwa:

(i) Fungsi θ terdefinisi dengan baik.

Untuk setiap $(k_1, e_H), (k_2, e_H) \in K \times \{e_H\}$ jika

$$
\begin{aligned}
(k_1, e_H) &= (k_2, e_H) \\
(k_1, e_H)(k_2, e_H)^{-1} &= (e_k, e_H) \\
(k_1, e_H)\left({k_2}^{-1}, {e_H}^{-1}\right) &= (e_k, e_H) \\
\left(k_1{k_2}^{-1}, e_H{e_H}^{-1}\right) &= (e_k, e_H) \\
\left(k_1{k_2}^{-1}, e_H\right) &= (e_k, e_H)
\end{aligned}
$$

diperoleh $k_1{k_2}^{-1} = e_k \in K$, maka $k_1 = k_2 \in K$.

Jadi, fungsi θ terdefinisi dengan baik.

(ii) Fungsi θ adalah homomorfisma.

Untuk setiap $(k_1, e_H)(k_2, e_H) \in K \times \{e_H\}$, maka

$$
\begin{aligned}
\theta\big((k_1, e_H)(k_2, e_H)\big) &= \theta\big((k_1k_2, e_He_H)\big) \\
&= \theta\big((k_1k_2, e_H)\big) \\
&= k_1k_2 \\
&= \theta(k_1, e_H)\theta(k_2, e_H).
\end{aligned}
$$

Jadi, fungsi θ adalah fungsi homomorfisma.

(iii) Fungsi θ adalah fungsi onto.

Ambil sembarang $k \in K$, maka untuk suatu elemen $e_H \in \{e_H\}$ terdapat hasilkali langsung $(k, e_H) \in K \times \{e_H\}$ sedemikian sehingga $\theta\big((k, e_H)\big) = k$.

Jadi, fungsi θ adalah onto.

(iv) Fungsi θ adalah fungsi satu-satu.

Untuk setiap $k_1, k_2 \in K$ dengan $k_1 = k_2$, jika $e_H \in \{e_H\}$ maka hasilkali langsungnya adalah $(k_1, e_H) = (k_2, e_H)$.

Jadi, fungsi θ adalah fungsi satu-satu.

Dengan demikian, dari (i), (ii), (iii) dan (iv) maka $K \times \{e_H\}$ isomorfik terhadap K.

3) Akan ditunjukkan $K \times H / K \times \{e_H\}$ isomorfik terhadap H.

Untuk menunjukkan bahwa $K \times H / K \times \{e_H\}$ isomorfik terhadap H digunakan Teorema 2.2.8. Definisikan suatu fungsi $\rho : K \times H \rightarrow H$ di mana $\rho\big((k, h)\big) = h$. Dengan menggunakan teorema tersebut hanya perlu ditunjukkan bahwa ρ suatu homomorfisma onto dengan Ker $\rho = K \times \{e_H\}$, yaitu sebagai berikut:

(i) Fungsi ρ terdefinisi dengan baik.

Untuk setiap $(k_1, h_1), (k_2, h_2) \in K \times H$, jika

$$(k_1, h_1) = (k_2, h_2)$$

$$
\begin{aligned}
(k_1, h_1)(k_2, h_2)^{-1} &= (e_k, e_H) \\
(k_1, h_1)\left(k_2{}^{-1}, h_2{}^{-1}\right) &= (e_k, e_H) \\
\left(k_1 k_2{}^{-1}, h_1 h_2{}^{-1}\right) &= (e_k, e_H)
\end{aligned}
$$

diperoleh $h_1 h_2{}^{-1} = e_H \in H$ maka $h_1 = h_2 \in H$.

Jadi, fungsi ρ terdefinisi dengan baik.

(ii) Fungsi ρ adalah homomorfisma.

Untuk setiap $(k_1, h_1), (k_2, h_2) \in K \times H$, maka

$$
\begin{aligned}
\rho\big((k_1, h_1)(k_2, h_2)\big) &= \rho\big((k_1 k_2, h_1 h_2)\big) \\
&= h_1 h_2 \\
&= \rho(k_1, h_1)\rho(k_2, h_2).
\end{aligned}
$$

Jadi, fungsi ρ adalah homomorfisma.

(iii) Fungsi ρ adalah fungsi onto.

Untuk sembarang $h \in H$ maka untuk suatu elemen $k \in K$ terdapat hasilkali langsung $(k, h) \in K \times H$ sedemikian sehingga $\rho\big((k, h)\big) = h$.

Jadi, fungsi ρ adalah fungsi onto.

(iv) Ker ρ adalah $K \times \{e_H\}$.

$$
\begin{aligned}
\text{Ker } \rho &= \big\{(k, h) \in K \times H : \rho\big((k, h)\big) = e_H\big\} \\
&= \{(k, e_H) : k \in K\}
\end{aligned}
$$

$= K \times \{e_H\}.$

Maka, berdasarkan Teorema Dasar Homomorfisma, terbukti bahwa $K \times H / K \times \{e_H\}$ isomorfik terhadap H.

Contoh 3.1.1.4

Sebagai contoh nyata adalah $\mathbb{Z}_6$ merupakan perluasan dari $\mathbb{Z}_3$ oleh $\mathbb{Z}_2$. Untuk membuktikannya, akan ditunjukkan bahwa terdapat subgrup normal $\langle[2k]_6\rangle = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$ dengan $k \in \mathbb{Z}$ sehingga

1) $\langle[2k]_6\rangle \lhd \mathbb{Z}_6$;
2) $\langle[2k]_6\rangle \cong \mathbb{Z}_3$;
3) $\mathbb{Z}_6/\langle[2k]_6\rangle \cong \mathbb{Z}_2$.

Bukti:

1) Akan ditunjukkan $\langle[2k]_6\rangle$ subgrup normal dari $\mathbb{Z}_6$.

Untuk menunjukkan $\langle[2k]_6\rangle$ adalah subgrup normal dari $\mathbb{Z}_6$, terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $\langle[2k]_6\rangle$ adalah subgrup dari $\mathbb{Z}_6$. Perhatikan Tabel Cayley berikut.

Tabel 3.1.1

Tabel Cayley $\langle[2k]_6\rangle$ dengan Operasi Penjumlahan Modulo 6

$\oplus_6$	$[0]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$
$[0]_6$	$[0]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$
$[2]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$	$[0]_6$

$[4]_6$	$[4]_6$	$[0]_6$	$[2]_6$

Dari Tabel 3.1.1 di atas, maka $\langle [2k]_6 \rangle$ adalah subgrup dari $\mathbb{Z}_6$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\langle [2k]_6 \rangle$ subgrup normal dari $\mathbb{Z}_6$. Artinya, harus ditunjukkan bahwa untuk setiap $[x]_6 \in \mathbb{Z}_6$ maka $[x]_6 \oplus_6 \langle [2k]_6 \rangle = \langle [2k]_6 \rangle \oplus_6 [x]_6$.

Diperoleh,

$[0]_6 \oplus_6 \langle [2k]_6 \rangle = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\} = \langle [2k]_6 \rangle \oplus_6 [0]_6$;

$[1]_6 \oplus_6 \langle [2k]_6 \rangle = \{[1]_6, [3]_6, [5]_6\} = \langle [2k]_6 \rangle \oplus_6 [1]_6$;

$[2]_6 \oplus_6 \langle [2k]_6 \rangle = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\} = \langle [2k]_6 \rangle \oplus_6 [2]_6$;

$[3]_6 \oplus_6 \langle [2k]_6 \rangle = \{[1]_6, [3]_6, [5]_6\} = \langle [2k]_6 \rangle \oplus_6 [3]_6$;

$[4]_6 \oplus_6 \langle [2k]_6 \rangle = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\} = \langle [2k]_6 \rangle \oplus_6 [4]_6$;

$[5]_6 \oplus_6 \langle [2k]_6 \rangle = \{[1]_6, [3]_6, [5]_6\} = \langle [2k]_6 \rangle \oplus_6 [5]_6$.

Jadi, $\langle [2k]_6 \rangle = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$ adalah subgrup normal dari $\mathbb{Z}_6$.

2) Akan ditunjukkan $\langle [2k]_6 \rangle$ isomorfik terhadap $\mathbb{Z}_3$.

Untuk menunjukkan $\langle [2k]_6 \rangle$ isomorfik terhadap $\mathbb{Z}_3$, terlebih dahulu definisikan suatu fungsi $\theta: M \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ dengan $\theta([2k]_6) = [x]_3$ untuk $[2k]_6 \in \langle [2k]_6 \rangle$ dan $[x]_3 \in \mathbb{Z}_3$.

Akan ditunjukkan bahwa:

(i) Fungsi θ terdefinisi dengan baik.

Fungsi θ terdefinisi dengan baik karena untuk setiap $[x]_6 = [y]_6$ dengan $x = 2k_1, y = 2k_2$ dan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ maka $[x]_3 = [y]_3$. Yaitu Jika $[x]_6 = [y]_6$ dengan $x = 2k_1, y = 2k_2$ dan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ maka $x = y \; mod \; 6 \Leftrightarrow 2k_1 = 2k_2 \; m \blacksquare d \; 6 \Leftrightarrow 6|2(k_1 - k_2) \Leftrightarrow 2(k_1 - k_2) = 6m$ untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$, diperoleh $2(k_1 - k_2) = 3l$ untuk suatu $l \in \mathbb{Z}$. Sehingga $3|2(k_1 - k_2) \Leftrightarrow 2k_1 = 2k_2 \; mod \; 3 \Leftrightarrow x = y \; mod \; 3 \Leftrightarrow [x]_3 = [y]_3$untuk $x, y \in \mathbb{Z}$.

Jadi, fungsi θ adalah fungsi yang terdefinisi dengan baik.

(ii) Fungsi θ adalah fungsi homomorfisma.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \theta([2k_1]_6 \oplus_6 [2k_2]_6) &= \theta([2k_1 \oplus_6 2k_2]_6) \\ &= [x_1 \oplus_3 x_2]_3 \\ &= [x_1]_3 \oplus_3 [x_2]_3 \\ &= \theta([2k_1]_6) \oplus_3 \theta([2k_2]_6). \end{aligned}$$

Jadi, fungsi θ adalah fungsi homomorfisma.

(iii) Fungsi θ adalah fungsi onto.

Ambil sembarang $[x]_3 \in \mathbb{Z}_3$, tulis $x = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Maka $x = 2k \; mod \; 3$ $\Leftrightarrow 3|x - 2k \Leftrightarrow x - 2k = 3m$ untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$. Akan terdapat $2x - 4k = 6m$ sehingga $6|2x - 4k \Leftrightarrow 2x = 4k \; mod \; 6$. Diperoleh $2x \in \mathbb{Z}_6$, karena $2x$ genap maka

$2x \in \langle [2k]_6 \rangle$. Tulis $2k \in \langle [2k]_6 \rangle$ dengan $x = k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Akibatnya terdapat $[2k]_6 \in \langle [2k]_6 \rangle$ sedemikian sehingga $\theta([2k]_6) = [2k]_3 = [x]_3$.

Jadi, fungsi θ adalah fungsi onto.

(iv) Fungsi θ adalah fungsi satu-satu.

Untuk menunjukkan bahwa θ merupakan fungsi satu-satu, harus ditunjukkan bahwa jika $\theta([x]_6) = \theta([y]_6) \Leftrightarrow [x]_3 = [y]_3$ maka $[x]_6 = [y]_6$. Yaitu $[x]_3 = [y]_3 \Leftrightarrow x = y \; mod \; 3 \Leftrightarrow 3|x - y \Leftrightarrow x - y = 3m$ untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$. Maka akan terdapat $2x - 2y = 6m$, tulis $2k_1 - 2k_2 = 6m$ dengan $x = k_1, \; y = k_2$. Sehingga $6|2k_1 - 2k_2 \Leftrightarrow 2k_1 = 2k_2 \; mod \; 6 \Leftrightarrow [2k_1]_6 = [2k_2]_6 \Leftrightarrow [x]_6 = [y]_6$.

Jadi, fungsi θ adalah fungsi satu-satu.

Dengan demikian, dari (i), (ii), (iii) dan (iv) maka $\langle [2k]_6 \rangle$ isomorfik terhadap $\mathbb{Z}_3$.

3) Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_6 / \langle [2k]_6 \rangle$ isomorfik terhadap $\mathbb{Z}_2$.

Untuk menunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_6 / \langle [2k]_6 \rangle$ isomorfik terhadap $\mathbb{Z}_2$, terlebih dahulu definisikan suatu fungsi $\varphi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ dengan $\varphi([x]_6) = [x]_2$. Dengan menggunakan Teorema Dasar Homomorfisma pada Teorema 2.2.8, cukup ditunjukkan bahwa:

(i) Fungsi φ terdefinisi dengan baik.

Fungsi φ terdefinisi dengan baik, sebab untuk setiap $[x]_6 = [y]_6$ maka $[x]_2 = [y]_2$.

Perhatikan

$[x]_6 = [y]_6 \Leftrightarrow x = y \mod 6 \Leftrightarrow 6|x - y \Leftrightarrow x - y = 6k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Maka terdapat $l \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $x - y = 6k = 2l \Leftrightarrow 2|x - y \Leftrightarrow x = y \mod 2$ artinya $[x]_2 = [y]_2$.

Jadi, fungsi φ adalah fungsi yang terdefinisi dengan baik.

(ii) Fungsi φ adalah fungsi homomorfisma.

Perhatikan bahwa

$$\varphi([x]_6 \oplus_6 [y]_6) = [x \oplus_2 y]_2 = [x]_2 \oplus_2 [y]_2 = \varphi([x]_6) \oplus_2 \varphi([y]_6)$$

untuk setiap $[x]_6, [y]_6 \in \mathbb{Z}_6$.

Jadi, fungsi φ adalah fungsi homomorfisma.

(iii) Fungsi φ adalah fungsi onto.

Untuk menunjukkan bahwa fungsi φ merupakan fungsi onto, yaitu sebagai berikut: Ambil sembarang $[x]_2 \in \mathbb{Z}_2$, tulis $x = 6k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Diperoleh $x = 6k \mod 2 \Leftrightarrow 6|x - 6k \Leftrightarrow x - 6k = 2l$ untuk suatu $l \in \mathbb{Z}$. Maka $x - 2l = 6k$ $\Leftrightarrow 6|x - 2l \Leftrightarrow x = 2l \mod 6$, diperoleh $x \in \mathbb{Z}_6$ artinya untuk sembarang $[x]_2 \in \mathbb{Z}_2$ terdapat $[x]_6 \in \mathbb{Z}_6$, sedemikian sehingga $\varphi([x]_6) = [x]_2$.

Jadi, fungsi φ adalah fungsi onto.

(iv) Ker φ adalah $\langle[2k]_6\rangle$.

$$
\begin{aligned}
\ker\varphi &= \{[x]_6 \in \mathbb{Z}_6 : \varphi([x]_6) = [0]_2\} \\
&= \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\} \\
&= \langle [2k]_6 \rangle.
\end{aligned}
$$

Jadi, Ker φ adalah $\langle [2k]_6 \rangle$.

Maka, dari (i)-(iv) berdasarkan Teorema Dasar Homomorfsma, terbukti bahwa $\mathbb{Z}_6/\langle [2k]_6 \rangle$ isomorfik terhadap $\mathbb{Z}_2$.

3.1.2 Lifting dari masalah perluasan grup

Telah ditunjukkan pada bagian 3.1.1 bahwa untuk setiap diberikan sepasang grup K dan H maka akan selalu ada suatu perluasan G dari K oleh H (dalam hal ini hasilkali langsungnya) yang mungkin saja tidak isomorfik seperti perluasan umum. Secara umum, perluasan dari dua grup yang diberikan akan isomorfik dengan hasilkali langsung dari grup pembangunnya. Seperti pada contoh sebelumnya, $\mathbb{Z}_6$ adalah perluasan dari $\mathbb{Z}_3$ dengan $\mathbb{Z}_2$, dan $\mathbb{Z}_6$ isomorfik dengan $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$. Namun, tidak selalu perluasan isomorfik dengan hasilkali langsung grup pembangunnya, contohnya S_3 adalah perluasan dari $\mathbb{Z}_3$ dengan $\mathbb{Z}_2$, akan tetapi S_3 tidak isomorfik dengan $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$.

Misalkan suatu perluasan dari K oleh H sebagai " hasilkali langsung" dari K oleh H, maka hasilkali ini akan memiliki banyak nilai. Masalah perluasan grup adalah mencari semua perluasan yang mungkin dari pasangan grup K dan H.

Andaikan grup G memiliki barisan normal

$$G = K_0 \geq K_1 \geq K_2 \geq \cdots \geq K_{n-1} \geq K_n = \{1\}$$

dengan grup faktor $H_1, H_2, \dots, H_n$ di mana $H_i = K_{i-1}/K_i$, untuk setiap $i \geq 1$.

Sekarang, $K_n = \{1\}$ sehingga $K_{n-1} = H_n$, namun lebih jauh akan ditemukan suatu hal yang menarik bahwa $K_{n-2}/K_{n-1} = H_{n-1}$ sehingga K_{n-2} merupakan perluasan dari K_{n-1} dan H_{n-1}. Maka dengan masalah perluasan grup, dapat dibentuk K_{n-2} dari K_{n-1} dan H_{n-1} yaitu dari H_n dan H_{n-1}. Selanjutnya perhatikan bahwa $K_{n-3}/K_{n-2} = H_{n-2}$ sehingga K_{n-3} merupakan perluasan dari K_{n-2} dan H_{n-2}. Dan dengan masalah perluasan pula, K_{n-3} dapat dibentuk dari K_{n-2} dan H_{n-2} yaitu dari H_n, H_{n-1} dan H_{n-2}. Kenaikan barisan komposisi ini dapat diakhiri dengan $G = K_0$ yang dibangun dari H_n,H_{n-1},…, H_1.

Perhatikan perluasan G dari K oleh H sebagai berikut

$$1 \rightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1. \qquad (*)$$

Berdasarkan Definisi 2.5.1 bahwa perluasan G tersebut merupakan barisan eksak di mana p merupakan homomorfisma onto, akan terdapat fungsi $\ell : H \longrightarrow G$ yang tidak harus homomorfisma.

Untuk mengontruksi lifting, diberikan suatu transversal dari K di G. Secara surjektif pada p terdapat $\ell(x) \in G$ dengan $p\ell(x) = x$. Selanjutnya fungsi $x \longrightarrow \ell(x)$ disebut sebagai lifting. Berikut definisi lifting yang dikonstruksi dari suatu perluasan grup.

Definisi 3.1.2.1 Lifting (Rotman, 2003: 785)

Jika

$$1 \rightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1$$

adalah suatu perluasan, maka suatu lifting adalah fungsi $\ell: H \longrightarrow G$, tidak harus merupakan fungsi homomorfisma, dengan $p\ell = 1_H$.

Sebaliknya, misalkan diberikan suatu lifting ℓ, klaim bahwa Im ℓ adalah suatu transversal pada K. Jika Kg suatu koset, maka $p(g) \in H$. Katakan $p(g) = x$, maka $p(g\ell(x)^{-1}) = 1$ sehingga $a = g\ell(x)^{-1} \in K$ dan $Kg = K\ell(x)$. Diperoleh bahwa setiap koset mempunyai suatu representasi di $\ell(H)$. Akan ditunjukkan bahwa $\ell(H)$ tidak memuat dua elemen dalam koset yang sama. Jika $K\ell(x) = K\ell(y)$, maka akan terdapat $a \in K$ dengan $a\ell(x) = \ell(y)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
a\ell(x) &= \ell(y) \\
p\big(a\ell(x)\big) &= p\big(\ell(y)\big) \\
p(a)p\big(\ell(x)\big) &= p\big(\ell(y)\big) \\
1.p\big(\ell(x)\big) &= p\big(\ell(y)\big) && \text{(karena } p(a) = 1\text{)} \\
p\big(\ell(x)\big) &= p\big(\ell(y)\big) \\
x &= y
\end{aligned}$$

sehingga $\ell(x) = \ell(y)$.

Dengan demikian, lifting dapat dikonstruksi sebagai suatu fungsi baru dari suatu perluasan (*).

Selanjutnya akan dikaji sifat-sifat dari lifting yang akan mendukung kajian tentang *factor set* yang ternormalisasi pada bab selanjutnya.

3.1.3 Lifting dari perluasan dengan K grup abelian

Secara natural, perluasan didefinisikan untuk sembarang grup K dan H, akan tetapi dalam tugas akhir ini akan dibahas perluasan untuk kasus khusus di mana K adalah grup abelian.

Jika G merupakan perluasan dari suatu grup abelian K oleh H, maka dapat didefinisikan K sebagai $\mathbb{Z}H$-modul di mana $\mathbb{Z}H$ merupakan ring yang elemen-elemennya adalah semua himpunan $\sum_{x \in H} M_x x$ untuk setiap $M_x \in \mathbb{Z}$. Perluasan G ini akan mendefinisikan $xa = \ell(x) + a - \ell(x)$ untuk lifting ℓ , $x \in H$, dan $a \in K$.

Berikut Proposisi yang mendukung pembuktian sifat lifting pada perluasan G dengan grup abelian K oleh H tersebut.

Proposisi 3.1.3.1

Jika

$$0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$$

adalah perluasan dari grup abelian K oleh grup H, dan misalkan $\ell: H \longrightarrow G$ adalah lifting. Maka

(i) Untuk setiap $x \in H$, konjugasi $\theta_x: K \longrightarrow K$, yang didefinisikan oleh

$$\theta_x(a): \ell(x) + a - \ell(x)$$

bergantung terhadap pemilihan lifting $\ell(x)$ pada x.

(ii) Fungsi $\theta: H \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$, yang didefinisikan dengan $x \longrightarrow \theta_x$ merupakan suatu homomorfisma.

Bukti:

(i) Akan ditunjukkan bahwa θ_x bergantung terhadap pemilihan lifting $\ell(x)$ pada x. Misalkan terdapat lifting lain $\ell^{'}(x) \in G$ dan $p\ell^{'}(x) = x$. Terdapat $b \in K$ dengan $\ell^{'}(x) = \ell(x) + b$ untuk $-\ell(x) + \ell'(x) \in \ker p = \mathrm{Im}\, i = K$. Sehingga

$$\begin{aligned} \ell^{'}(x) + a - \ell^{'}(x) &= \ell(x) + b + a - b - \ell(x) \\ &= \ell(x) + b + b - a - \ell(x) \qquad (K \text{ abelian}) \\ &= \ell(x) + a - \ell(x) \end{aligned}$$

(ii) Fungsi $\theta: H \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$ adalah homomorfisma, karena untuk setiap $x, y \in H$ dan $a \in K$, maka

$$\theta_x\left(\theta_y(a)\right) = \theta_x\big(\ell(x) + a - \ell(x)\big) = \ell(x) + \ell(y) + a - \ell(y) - \ell(x)$$

dan

$$\theta_{xy}(a) = \ell(xy) + a - \ell(xy).$$

Karena $\ell(x) + \ell(x)$ dan $\ell(xy)$ keduanya lifting pada elemen xy, maka diperoleh bahwa

$$\theta_x\left(\theta_y(a)\right) = \theta_{xy}(a).$$

Suatu aksi dari grup G pada himpunan S adalah fungsi $G \times S \longrightarrow S$ yang dinotasikan oleh $(g, x) \mapsto gx$ sehingga untuk setiap $x \in S$ dan $g_1, g_2 \in G$ maka

$$ex = x \text{ dan } (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x).$$

Dari Definisi 3.1.3.1 di atas diperoleh fungsi homomorfisma $\theta: H \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$ yang didefinisikan dengan $x \longrightarrow \theta x$. Dapat dikonstruksi suatu aksi dari grup H pada grup K pada fungsi θ sedemikian sehingga fungsi θ menjadi $\theta: H \times K \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$ yang dinotasikan oleh $(x, a) \mapsto \theta_x(a)$ untuk setiap $x \in H$ dan $a \in K$ maka

$$\theta_x(a) = xa.$$

Berdasarkan Definisi 2.4.1 tentang modul bahwa suatu grup M dikatakan R-modul (kanan/kiri) jika terdapat suatu aksi dari grup R pada grup M yang memenuhi aksioma-aksioma modul. Karena grup H beraksi pada grup K yaitu terdapat perkalian skalar $H \times K \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$ yang didefinisikan oleh $(x, a) \mapsto \theta_x(a)$ dan fungsi θ homomorfisma akibatnya θ akan memenuhi aksioma-aksioma modul. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa K adalah suatu H-modul. Jika grup H dikontruksi menjadi $\mathbb{Z}H$ sebagai ring yang elemen-elemennya adalah semua himpunan $\sum_{x \in H} M_x x$ untuk setiap $M_x \in \mathbb{Z}$, maka K dapat dikatakan sebagai suatu $\mathbb{Z}H$-modul.

Proposisi berikut akan menunjukkan bagaimana suatu fungsi homomorfisma $\theta: H \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$ dapat menjadikan K sebagai suatu $\mathbb{Z}$?-modul.

Proposisi 3.1.3.2

Misalkan K dan H grup dengan K grup abelian. Maka Suatu homomorfisma $\theta: H \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$ menjadikan K sebagai suatu $\mathbb{Z}H$-modul kiri jika perkalian skalar didefinisikan oleh

$$xa = \theta_x(a), \quad \forall a \in K, x \in H.$$

Sebaliknya, jika K suatu $\mathbb{Z}H$-modul kiri, maka $x \longrightarrow \theta x$ mendefinisikan suatu homomorfisma $\theta: H \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$ di mana $\theta_x(a) \longrightarrow xa$.

Bukti:

Definisikan perkalian skalar seperti berikut:

Untuk setiap $u \in \mathbb{Z}H$ memiliki bentuk unik yaitu $u = \sum_{x \in H} M_x x$ dengan $M_x \in \mathbb{Z}$ dan hampir semua $M_x = 0$. Definisikan

$$\left(\sum_{x \in H} M_x x\right) a = \sum_{x \in H} M_x \theta_x(a) = \sum_{x \in H} M_x (xa)$$

di mana θ homomorfisma, maka $\theta(a + b) = \theta(a) + \theta(b)$. Karena $\theta_x \in \mathrm{Aut}(K)$ akibatnya $\theta_x(a + b) = \theta_x(a) + \theta_x(b) = xa + xb = x(a + b)$, sehingga untuk suatu $u \in \mathbb{Z}H$ maka

$$\begin{aligned} u(a+b) &= \left(\textstyle\sum_{x \in H} M_x x\right)(a + b) \\ &= \textstyle\sum_{x \in H} M_x \, \theta_x(a + b) \end{aligned}$$

$= \sum_{x \in H} M_x \left(x(a+b)\right)$

$= \sum_{x \in H} M_x \,(xa + xb)$

$= \sum_{x \in H} M_x \left(\theta_x(a) + \theta_x(b)\right)$

$= \sum_{x \in H} M_x \theta_x\,(a) + \sum_{x \in H} M_x \theta_x\,(b)$

$= (\sum_{x \in H} M_x x)a + (\sum_{x \in H} M_x x)b$

$= ua + ub$……………………………. (*)

Begitu pula untuk $\theta(x+y)a = \theta_{x+y}(a) = \theta_x(a) + \theta_y(a)$, diperoleh

$(u+v)a \quad = \left(\sum_{x \in H} M_x x + \sum_{y \in H} M_y y\right)(a)$

$= \left(\sum_{x+y \in H} M_{x+y}(x+y)\right)(a)$

$= \sum_{x+y \in H} M_{x+y} \theta_{x+y}\,(a)$

$= \sum_{x+y \in H} M_{x+y} \left(x + y(a)\right)$

$= \sum_{x+y \in H} M_{x+y}\,(xa + ya)$

$= \sum_{x+y \in H} M_{x+y} \left(\theta_x(a) + \theta_y(a)\right)$

$= \sum_{x \in H} M_x\, \theta_x(a) + \sum_{y \in H} M_y\, \theta_y(a)$

$= (\sum_{x \in H} M_x\, x)a + \left(\sum_{y \in H} M_y\, y\right)a$

$= ua + va$……………………………………. (**)

Untuk $\theta(xy)a = \theta_{xy}(a) = \theta_x\left(\theta_y(a)\right)$, diperoleh

$(uv)a \quad = \left(\sum_{x \in H} M_x x \,.\, \sum_{y \in H} M_y y\right)(a)$

$= \left(\sum_{xy \in H} M_{xy} xy\right)(a)$

$= \sum_{xy \in H} M_{xy} \theta_{xy} \, (a)$

$= \sum_{xy \in H} M_{xy} \left(xy(a)\right)$

$= \sum_{xy \in H} M_{xy} \, \theta_x \left(\theta_y(a)\right)$

$= \sum_{x \in H} M_x \, \theta_x \left(\sum_{y \in H} M_y \, \theta_y(a)\right)$

$= \sum_{x \in H} M_x \, \theta_x \left(\left(\sum_{y \in H} M_y \, y\right)a\right)$

$= \sum_{x \in H} M_x \, \theta_x(va)$

$= \left(\sum_{x \in H} M_x \, x\right)(va)$

$= u(va)$………………………………………. (***)

Terakhir, $\theta(1)a = \theta_{1_k}(a) = 1_k . a = a$………………… (****)

Dari (*)-(****), diperoleh bahwa K memenuhi aksioma modul dengan untuk $\mathbb{Z}H$ sebagai ringnya. Dengan demikian, K adalah $\mathbb{Z}H$-modul.

Sedangkan, jika K suatu $\mathbb{Z}H$-modul kiri, maka

$\theta(xy)(a) \quad = \theta_{xy}(a) = xy(a) = x(ya)$

$= x\left(\theta_y(a)\right) = \theta_x\left(\theta_y(a)\right) = \theta_x\left(\theta y(a)\right)$

$= \theta x\left(\theta y(a)\right) = (\theta x \theta y)(a).$

Dengan demikian, fungsi $\theta \colon H \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$ suatu homomorfisma.

Dari Proposisi 3.1.3.1 dan Proposisi 3.1.3.2 diperoleh suatu kesamaan bahwa $\theta_x(a): \ell(x) + a - \ell(x)$ dan $\theta_x(a) = xa$. Sehingga

$$xa = \ell(x) + a - \ell(x).$$

Berikut corollary yang menunjukkan bahwa sifat di atas didefinisikan untuk suatu perluasan dengan K grup abelian.

Corollary 3.1.3.3

Jika

$$0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$$

adalah suatu perluasan dari suatu grup abelian K oleh suatu grup H, maka K adalah suatu $\mathbb{Z}H$-modul kiri jika didefinisikan

$$xa = \ell(x) + a - \ell(x)$$

di mana $\ell: H \to G$ adalah lifting, dengan $x \in H$ dan $a \in K$; untuk lebih jauh, perkalian skalarnya bergantung pada pemilihan lifting ℓ.

Catatan:

Selanjutnya untuk memudahkan dalam penyebutan, notasi H-modul akan digunakan untuk mengganti notasi $\mathbb{Z}H$-modul kiri.

Telah ditunjukkan bahwa untuk suatu perluasan dengan K suatu H-modul, diperoleh suatu persamaan $xa = \ell(x) + a - \ell(x)$ untuk setiap $x \in H$ dan $a \in K$.

3.1.4 Perluasan split

Jika fungsi $\ell: H \longrightarrow G$ pada Definisi 3.1.2.1 merupakan homomorfisma maka perluasan G dapat dikatakan sebagai perluasan split dengan syarat bahwa $p\ell = e_H$. Perluasan split ini disebut sebagai *semi direct product* dari K oleh H.

Berikut definisi yang akan menunjukkan suatu perluasan split.

Definisi 3.1.4.1 Perluasan split (Rotman, 2003: 788)

Suatu perluasan grup

$$0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$$

adalah split jika terdapat suatu fungsi homomorfisma $j: H \to G$ dengan $pj = 1_H$.

Proposisi berikut memberikan sifat-sifat yang dipenuhi jika G merupakan suatu perluasan split.

Proposisi 3.1.4.2

Misalkan K adalah subgrup normal dari suatu grup penjumlahan G.

(i) Jika $0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$ adalah perluasan split, dengan $j: H \to G$ yang memenuhi $pj = e_H$, maka $i(K) \cap j(H) = \{0\}$ dan $i(K) + j(H) = G$.

(ii) Pada kasus ini, setiap $g \in G$ mempunyai ekspresi unik $g = i(a) + j(x)$, dengan $a \in K$ dan $x \in H$.

(iii) Misalkan K dan H adalah subgrup dari grup G dengan $K \lhd G$. Maka G adalah semidirect product dari K oleh H jika dan hanya jika $K \cap H = \{0\}$,

$K + H = G$, dan untuk setiap $g \in G$ mempunyai ekspresi unik $g = a + x$, di mana $a \in K$ dan $x \in H$.

Bukti:

(i) Misalkan G adalah perluasan split. Ambil sembarang $g \in G$ dan $g \in i(K) \cap j(Q)$, maka $g \in i(K)$ dan $g \in j(Q)$. Tulis $g = i(a) = j(x)$ untuk suatu $a \in K$ dan $x \in H$. Jika $g = j(x)$ akibatnya $p(g) = p\big(j(x)\big) = pj(x) = x$. Disisi lain bahwa jika $g = i(a)$ akibatnya $p(g) = p\big(i(\ \cdot\ )\big) = 0$ di mana Im i = ker p. Sehingga $x = 0$ dan $g = j(x) = 0 = i(a)$. Jadi $g = 0$ ada di $i(K) \cap j(Q)$ akibatnya $i(K) \cap j(Q) = \{0\}$. Selanjutnya, ambil sembarang $g \in G$ maka $p(g) = pjp(g)$ (karena $pj = e$).

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} p(g) &= pjp(g) \\ p(g) - pjp(g) &= e_H \\ p\big(g - jp(g)\big) &= e_H \qquad (p \text{ homomorfisma}) \end{aligned}$$

diperoleh bahwa $g - jp(g) \in \ker p = \text{Im } i$.

Karena $g - jp(g) \in \text{Im } i$, terdapat $a \in K$ dengan $g - jp(g) = i(a)$, sehingga $g = i(a) + jp(g) = i(a) + j\big(p(g)\big) \in i(K) + j(H)$.

Jadi, $i(K) \cap j(H) = \{0\}$ dan $i(K) + j(H) = G$.

(ii) Karena $G = i(K) + j(H)$ maka untuk setiap $g \in G$ memiliki suatu faktorisasi $g = i(a) + j\big(p(g)\big)$. Untuk membuktikan keunikannya, misalkan

$$i(a) + j(x) = i(b) + j(y)$$

(iii) $a, b \in K$ dan $x, y \in H$. Maka

$$-i(b) + i(a) = j(y) - j(x) \in i(K) \cap j(H) = \{0\},$$

sehingga $i(a) = i(b)$ dan $j(x) = j(y)$.

Jadi, untuk setiap $g \in G$ mempunyai ekspresi unik $g = i(a) + j(x)$, di mana $a \in K$ dan $x \in H$.

(iv) Jika G adalah suatu *semi direct product*, maka G juga adalah suatu perluasan split. Berdasarkan bukti (i) dan (ii), diperoleh bahwa jika G juga adalah suatu perluasan split maka $K \cap H = \{0\}$, $K + H = G$ dan untuk setiap $g \in G$ mempunyai ekspresi unik $g = a + x$, di mana $a \in K$ dan $x \in H$.

Sebaliknya, untuk membuktikan bahwa G adalah *semi direct product*, dapat dibuktikan bahwa G merupakan suatu perluasan split. Berdasarkan Definisi 3.1.4.1 bahwa suatu perluasan split merupakan suatu perluasan

$$0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$$

jika terdapat suatu fungsi homomorfisma $j: H \longrightarrow G$ dengan $pj = 1_H$.

Karena untuk setiap $g \in G$ mempunyai ekspresi unik $g = ax$, untuk $a \in K$ dan $x \in H$. Untuk mengontruksi suatu perluasan, definisikan suatu fungsi $p: G \longrightarrow H$ dengan $p(ax) = x$. Karena fungsi p hanya bergantung terhadap koordinat pertama dari G, maka $\ker p = \{(a.1) = (a): a \in K\}$. Jika didefinisikan suatu fungsi $i: K \longrightarrow G$

dengan $i(a) = a.1 = a$ sehingga Im i = ker p yang merupakan syarat suatu barisan eksak untuk membangun suatu perluasan. Sehingga diperoleh suatu perluasan

$$0 \to K \overset{i}{\to} G \overset{p}{\to} H \to 1.$$

Selanjutnya, definisikan suatu fungsi $j: H \longrightarrow G$ dengan $j(x) = (ax)$ untuk setiap $a \in K$ dan $ax \in KH = G$ yang merupakan fungsi homomorfisma karena

$$j(x + y) = a(x + y) = ax + ay = j(x) + j(y).$$

Sekarang, $p\big(j(x)\big) = p(ax) = x$, sehingga $pj = e_H = 1_H$. Dengan demikian G merupakan suatu perluasan split, akibatnya G adalah suatu *semi direct product* dari K oleh H.

Sebagai contoh adalah suatu hasilkali langsung $K \times H$ merupakan *semi direct product* dari K oleh H (dari H oleh K). Selain itu, suatu grup abelian G adalah *semi direct product* jika dan hanya jika G merupakan suatu hasilkali langsung.

3.1.5 Perluasan yang merealisasikan operator *(realizes the operator)*

Perluasan G dari K oleh H dengan K suatu H-modul yang memenuhi Corollary 3.1.3.3 dapat dikatakan sebagai perluasan dari K oleh H yang merealisasikan operator (*realizes the operators*).

Berikut definisi perluasan yang merealisasikan operator.

Definisi 3.1.5.1 Perluasan *realizes the operator* (Rotman, 2003: 790)

Misalkan H grup dan K suatu H-modul. Suatu perluasan G dari K oleh H yang merealisasikan operator (*realizes the operator)* jika untuk setiap $x \in H$ dan $a \in K$, diperoleh

$$xa = \ell(x) + a - \ell(x).$$

Dari definisi di atas dapat dipahami bahwa perluasan dari sembarang dua grup akan banyak mendefinisikan sifat baru jika diberikan sifat khusus pada grup yang diberikan. Dalam hal ini, dengan membatasi grup K sebagai grup abelian akan diperoleh definisi baru seperti pada Definisi 3.1.5.1 di atas.

Begitupun halnya karena pengkhususan K sebagai grup abelian, didefinisikan suatu perluasan baru yang sangat bermanfaat dalam pengkajian sifat-sifat pada *factor set* yang ternormalisasi di bab selanjutnya.

3.1.6 *Semi direct product realizes the operator*

Pada bagian 3.1.5 telah dikatakan bahwa jika G merupakan perluasan split dari K oleh H dengan K suatu H-modul maka G disebut sebagai *semi direct product* dari K oleh H. Selanjutnya, jika G memenuhi persamaan pada Definisi 3.1.5.1 maka G dikatakan sebagai *semi direct product realizes the operator* dari K oleh H.

Definisi 3.1.5.1 mendefinisikan suatu perluasan baru G dari K oleh H dengan K adalah H-modul yaitu $G = K \rtimes H$ sebagai himpunan semua pasangan terurut $(a, x), (b, y) \in K \times H$ dengan operasi

$$(a, x) + (b, y) = (a + xb, xy)$$

untuk setiap $a, b \in K$ dan $x, y \in H$.

Berikut definisi dari perluasan $G = K \rtimes H$.

Definisi 3.1.6.1 (Rotman, 2003: 790)

Misalkan H grup dan K suatu H-modul. Definisikan

$$G = K \rtimes H$$

sebagai himpunan semua pasangan terurut $(a, x) \in G = K \rtimes H$ dengan operasi

$$(a, x) + (b, y) = (a + xb, xy).$$

Perluasan $G = K \rtimes H$ disebut sebagai *semi direct product realizes the operator* dari K oleh H.

Berikut proposisi yang menunjukkan bahwa Perluasan $G = K \rtimes H$ merupakan *semi direct product realizes the operator* dari K oleh H.

Proposisi 3.1.6.2

Diberikan suatu grup H dan suatu H-modul K, maka $G = K \rtimes H$ adalah suatu *semi direct product realizes the operator* dari K oleh H.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa G merupakan *semi direct product realizes the operator* dari K oleh H dengan K suatu H-modul, akan dibuktikan G adalah grup. Untuk membuktikan bahwa G adalah grup, akan ditunjukkan bahwa:

(i) G tertutup.

Ambil $(a, x), (b, y) \in G$ dengan $a, b \in K$ dan $x, y \in H$ maka berdasarkan operasi di G diperoleh

$$(a, x) + (b, y) = (a + xb, xy).$$

Karena K merupakan suatu H-modul, maka $a + xb \in K$ dan $xy \in H$, di mana K, H adalah grup. Sehingga diperoleh $(a + xb, xy) \in G$.

Jadi, G tertutup.

(ii) G memenuhi sifat asosiatif.

Ambil sembarang $(a, x), (b, y), (c, z) \in G$ dengan $a, b, c \in K$ dan $x, y, z \in H$, maka

$$\begin{aligned}
[(a, x) + (b, y)] + (c, z) &= (a + xb, xy) + (c, z) \\
&= (a + xb + (xy)c, (xy)z) \\
&= (a + xb + xyc, xyz).
\end{aligned}$$

Disisi lain,

$$
\begin{aligned}
(a,x)+[(b,y)+(c,z)] &= (a,x)+(b+yc,yz) \\
&= \big(a+x(b+yc),x(yz)\big) \\
&= (a+xb+xyc,xyz).
\end{aligned}
$$

Sehingga dapat diperoleh bahwa G memenuhi sifat asosiatif yaitu

$$[(a,x)+(b,y)]+(c,z)=(a,x)+[(b,y)+(c,z)].$$

(iii) G memiliki elemen identitas.

Terdapat elemen identitas $(0,1)\in G$ sedemikian sehingga untuk setiap $(a,x)\in G$ berlaku $(a,x)+(0,1)=(a+x.0,x.1)=(a+0,x)=(a,x)$. Begitu pula sebaliknya berlaku $(0,1)+(a,x)=(0+1.a,1.x)=(0+a,x)=(a,x)$.

Jadi, G memiliki elemen identitas untuk setiap $(a,x)\in G$.

(iv) G memiliki elemen invers.

Untuk setiap $(a,x)\in G$ terdapat elemen invers $\left(-x^{-1}a,x^{-1}\right)\in G$ sedemikian sehingga

$$
\begin{aligned}
(a,x)+\left(-x^{-1}a,x^{-1}\right) &= \left(a+x\left(-x^{-1}a\right),xx^{-1}\right) \\
&= \left(a+\left(-xx^{-1}a\right),xx^{-1}\right) \\
&= (a+(-1.a),1) \\
&= (a-a,1) \\
&= (0,1).
\end{aligned}
$$

Begitu pula dengan $\left(-x^{-1}a, x^{-1}\right) + (a, x) = (0,1)$.

Jadi, G memiliki elemen invers untuk setiap elemen $(a, x) \in G$.

Dengan demikian diperoleh bahwa G adalah grup.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa G adalah *semi direct product*, dapat dibuktikan bahwa G merupakan suatu perluasan split. Berdasarkan Definisi 3.1.4.1 bahwa suatu perluasan split merupakan suatu perluasan

$$0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$$

jika terdapat suatu fungsi homomorfisma $\ell: H \longrightarrow G$ dengan $p\ell = 1_H$.

Untuk mengontruksi suatu perluasan, definisikan suatu fungsi $p: G \longrightarrow H$ dengan $p(a, x) = x$. Karena fungsi p hanya bergantung terhadap koordinat pertama dari G, maka fungsi p merupakan homomorfisma onto dengan $\ker p = \{(a, 1: a \in K)\}$. Jika didefinisikan suatu fungsi $i: K \longrightarrow G$ dengan $i(a) = (a, 1)$ sehingga Im i = $\ker p$ yang merupakan syarat suatu barisan eksak untuk membangun suatu perluasan. Sehingga diperoleh suatu perluasan

$$0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$$

Selanjutnya, definisikan suatu fungsi $\ell: H \longrightarrow G$ dengan $\ell(x) = (0, x)$ yang merupakan fungsi homomorfisma karena

$$\ell(xy) = (0, xy) = (0, x) + (0, y) = \ell(x) + \ell(y).$$

Sekarang, $p\ell(x) = p(0, x) = x$, sehingga $p\ell = e_H = 1_H$. Dengan demikian G merupakan suatu perluasan split, akibatnya G adalah suatu *semi direct product* dari K oleh H.

Terakhir, akan ditunjukkan bahwa G merupakan perluasan yang merealisasikan operator (*realizes the operator*). Berdasarkan Definisi 3.1.5.1 bahwa G dikatakan sebagai perluasan *realizes the operator* dari K oleh H dengan K suatu H-modul jika untuk setiap $x \in H$ dan $a \in K$ maka

$$xa = \ell(x) + a - \ell(x).$$

Karena fungsi ℓ merupakan fungsi pada perluasan split, sudah pasti bahwa fungsi ℓ merupakan suatu lifting. Untuk setiap $x \in H$ maka setiap lifting dari x memiliki bentuk $\ell(x) = (b, x)$ untuk suatu $b \in K$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\ell(x) + a - \ell(x) &= (b, x) + (a, 1) - (b, x) \\
&= (b + xa, x) + (-x^{-1}b, x^{-1}) \\
&= (b + xa + x(-x^{-1}b), xx^{-1}) \\
&= (b + xa + (-xx^{-1}b), 1) \\
&= (b + xa + (-1.b), 1) \\
&= (b + xa - b, 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (b - b + xa, 1)\\
&= (xa, 1)\\
&= xa.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, G adalah *semi direct product realizes the operator* dari K oleh H dengan K suatu H-modul.

3.2 *Factor Set* yang Ternormalisasi (*The Normalized Factor set*)

Factor set yang dibahas pada tugas akhir ini adalah *factor set* dari perluasan $0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$ dengan K suatu H-modul. Selanjutnya, jika diasumsikan bahwa G adalah perluasan *realizes the operator*, maka G akan menginduksi suatu *factor set* yang ternormalisasi. Sebelum dikaji lebih lanjut tentang *factor set* yang ternormalisasi, akan dibahas terlebih dahulu konsep *factor set*.

3.2.1 *Factor set*

Factor set yang dibahas pada bab ini adalah *factor set* dari suatu perluasan $0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$ dengan K suatu H-modul. Telah didefinisikan pada bagian 3.1.6 bahwa terdapat perluasan G dari K oleh H yaitu $G = K \rtimes H$ sebagai himpunan semua pasangan terurut $(a, x), (b, y) \in K \times H$ dengan operasi

$$(a, x) + (b, y) = (a + xb, xy)$$

untuk setiap $a, b \in K$ dan $x, y \in H$.

Jika terdapat fungsi $f: H \times H \longrightarrow K$ sedemikian sehingga mendefinisikan perluasan baru $G_f = K \rtimes H$ sebagai himpunan semua pasangan terurut $(a, x), (b, y) \in K \times H$ dengan operasi

$$(a, x) + (b, y) = (a + xb + f(x, y), xy)$$

untuk setiap $a, b \in K$ dan $x, y \in H$. Maka fungsi f pada perluasan G_f menginduksi suatu fungsi yang istimewa.

Pada teorema berikut akan ditunjukkan bahwa fungsi f mendefinisikan suatu *factor set*.

Teorema 3.2.1.1 *Factor set* (Rotman, 2003: 796)

Misalkan H grup, K adalah H-modul, suatu fungsi $f: H \times H \rightarrow K$ adalah suatu *factor set* jika dan hanya jika memenuhi:

(i) $f(x, y) + f(xy, z) = xf(y, z) + f(x, yz)$, untuk setiap $x, y, z \in H$.

(ii) $f(1, y) = 0 = f(x, 1)$, untuk setiap $x, y \in H$, di mana 0 identitas di K dan 1 identitas di H.

Lebih khusus, terdapat suatu perluasan G *realizes the operator* dari K oleh H, dan suatu transversal $\ell: H \rightarrow G$ yang berkorespondensi dengan *factor set* f.

Bukti:

Untuk membuktikan Teorema 3.2.1.1 Definisikan $G_f = K \rtimes H$ sebagai himpunan semua pasangan terurut $(a, x), (b, y) \in K \times H$ dengan operasi

$$(a, x) + (b, y) = (a + xb + f(x, y), xy)$$

untuk setiap $a, b \in K$ dan $x, y \in H$.

Jika f secara identik adalah 0, maka $G_f = G$ (pada Definisi 3.1.6.1).

Akan dibuktikan bahwa fungsi f pada perluasan G_f menginduksi suatu *factor set*.

(i) Dengan sifat asosiatif di G_f yaitu untuk setiap $(a, x), (b, y), (c, z) \in K \times H$ maka

$$\begin{aligned} [(a, x) + (b, y)] + (c, z) &= (a + xb + f(x, y), xy) + (c, z) \\ &= (a + xb + f(x, y) + xyc + f(xy, z), xyz) \qquad \text{(a)} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (a, x) + [(b, y) + (c, z)] &= (a, x) + (b + yc + f(y, z), yz) \\ &= \big(a + x\big(b + yc + f(y, z)\big) + f(x, yz), xyz\big) \\ &= (a + xb + xyc + xf(y, z) + f(x, yz), xyz). \qquad \text{(b)} \end{aligned}$$

Dari (a) dan (b) maka

$$\begin{aligned} [(a, x) + (b, y)] + (c, z) &= (a, x) + [(b, y) + (c, z)] \\ (a + xb + f(x, y) + xyc + f(xy, z), xyz) &= (a + xb + xyc + xf(y, z) + f(x, yz), xyz). \end{aligned}$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} a + xb + f(x,y) + xyc + f(xy,z) &= a + xb + xyc + xf(y,z) + f(x,yz) \\ f(x,y) + f(xy,z) &= xf(y,z) + f(x,yz). \end{aligned}$$

(ii) Untuk menunjukkan $f(1,y) = 0 = f(x,1)$ untuk setiap $\forall\, x, y \in H$, perhatikan bahwa untuk setiap $(a,x),(b,y),(a,1),(b,1) \in G_f = K \rtimes H$ maka

$(a,1) + (b,y) = (a + b + f(1,y), y)$ …………….. (i)

$(a,x) + (b,1) = (a + xb + f(x,1), x)$……………. (ii)

dan

untuk setiap $(a,x),(b,y),(a,1),(b,1) \in G = K \rtimes H$ maka

$(a,1) + (b,y) = (a + b, y)$ ……………………….. (iii)

$(a,x) + (b,1) = (a + xb, x)$ …………………..... (iv)

Dapat ditunjukkan bahwa $G_f \cong G$, maka dari (i) & (iii) diperoleh $f(1,y) = 0$ dan dari (ii) & (iv) diperoleh $f(x,1) = 0$, sehingga

$$f(1,y) = 0 = f(x,1).$$

Selanjutnya, untuk menunjukkan G_f suatu perluasan yang merealisasikan operator, pertama akan ditunjukkan bahwa G_f adalah grup yaitu sebagai berikut:

(a) G_f tertutup.

Ambil $(a,x),(b,y) \in G_f$ maka $(a,x)+(b,y)=(a+xb+f(x,y),xy)$. Karena $a+xb+f(x,y) \in K$ dan $xy \in H$ maka $(a+xb+f(x,y),xy) \in G_f$.

Jadi, G_f tertutup.

(b) G_f memenuhi sifat asosiatif.

Pada pembuktian $f(x,y)+f(xy,z)=xf(y,z)+f(x,yz)$, telah ditunjukkan bahwa G_f memenuhi sifat asosiatif.

Jadi, G_f memenuhi sifat asosiatif.

(c) Terdapat elemen identitas $(0,1) \in G_f$, karena $f(1,x)=f(y,1)=0$ maka untuk setiap $(a,x) \in G_f$ berlaku:

$$\begin{aligned}(0,1)+(a,x) &= (0+1.a+f(1,x),1x)\\ &= (a,x).\end{aligned}$$

Jadi, G_f memuat elemen identitas.

(d) Untuk setiap $(a,x) \in G_f$ terdapat elemen identitas $-(a,x) \in G_f$ di mana $-(a,x)=(-x^{-1}a-x^{-1}f(x,x^{-1}),x^{-1})$ sedemikan sehingga

$$\begin{aligned}-(a,x)+(a,x) &= \left(-x^{-1}a-x^{-1}f(x,x^{-1}),x^{-1}\right)+(a,x)\\ &= \left(-x^{-1}a-x^{-1}f(x,x^{-1})+x^{-1}a+f(x^{-1},x),x^{-1}x\right)\\ &= \left(-x^{-1}f(x,x^{-1})+f(x^{-1},x),1\right)\\ &= (0,1).\end{aligned}$$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa G_f adalah perluasan *realizes the operator*.

Perhatikan perluasan

$$0 \to K \xrightarrow{i} G_f \xrightarrow{p} H \to 1.$$

Definisikan fungsi $i: K \to G_f$ oleh $i: a \to (a,1)$.

Untuk menunjukkan bahwa G_f adalah perluasan dari K oleh H *realizes the operator*, harus ditunjukkan bahwa untuk setiap lifting ℓ memenuhi

$$xa = \ell(x) + a - \ell(x)$$

untuk setiap $a \in K$ dan $x \in H$.

Sekarang, $\ell(x) = (b,x)$ untuk suatu elemen $b \in K$ dan untuk setiap $(a,1) \in G_f$ maka

$$\begin{aligned}
\ell(x) + a - \ell(x) &= (b,x) + (a,1) - (b,x) \\
&= (b + xa + f(x,1), x) - (b,x) \\
&= (b + xa, x) + \left(-x^{-1}b - x^{-1}f\left(x,x^{-1}\right), x^{-1}\right) \\
&= (b + xa + x[-x^{-1}b - x^{-1}f(x,x^{-1})] + \ f(x,x^{-1}), xx^{-1}) \\
&= (b + xa - xx^{-1}b - xx^{-1}f(x,x^{-1}) + f(x,x^{-1}), 1) \\
&= \left(b + xa - b - f\left(x,x^{-1}\right) + f\left(x,x^{-1}\right), 1\right) \\
&= (xa, 1).
\end{aligned}$$

Maka G_f adalah perluasan *realizes the operator*.

Terakhir, akan ditunjukkan bahwa f adalah *factor set* yang ditentukan oleh lifting ℓ. Pilih lifting dengan $\ell(x) = (0, x)$ untuk setiap $x \in H$. *Factor set* F ditentukan oleh ℓ yang didefinisikan oleh

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \ell(x) + \ell(y) - \ell(xy) \\
&= (0,x) + (0,y) - (0,xy) \\
&= (0 + x.0 + f(x,y), xy) + (-(xy)^{-1}0 - (xy)^{-1}f(xy,(xy)^{-1}), (xy)^{-1}) \\
&= (f(x,y), xy) + (-(xy)^{-1}f(xy,(xy)^{-1}), (xy)^{-1}) \\
&= (f(x,y) + xy[-(xy)^{-1}f(xy,(xy)^{-1})] + f(xy,(xy)^{-1}), (xy)(xy)^{-1}) \\
&= (f(x,y) - (xy)(xy)^{-1}f(xy,(xy)^{-1}) + f(xy,(xy)^{-1}), 1) \\
&= (f(x,y) - f(xy,(xy)^{-1}) + f(xy,(xy)^{-1}), 1) \\
&= (f(x,y), 1).
\end{aligned}$$

Dengan demikian, hal ini mengatakan bahwa perluasan G_f menginduksi suatu *factor set*.

3.2.2 *Factor set* yang ternormalisasi *(the normalized factor set)*

Telah dibahas sebelumnya bagaimana konsep *factor set* pada perluasan $0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$ dengan K suatu H-modul. Selanjutnya, jika diasumsikan bahwa G adalah perluasan *realizes the operator* dan pemilihan transversal $\ell: H \longrightarrow G$ sebagai suatu lifting maka G akan mengontruksi suatu *factor set* ternormalisasi yang selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *factor set* ternormalisasi ini akan memenuhi sifat *factor set* pada Teorema 3.2.1.1.

Karena ℓ suatu transversal dari K di G dan $K+g$ suatu koset dari K di G, maka untuk setiap elemen $g \in G$ akan memiliki bentuk unik yaitu $g = a + \ell(x)$ dengan $a \in K$ dan $x \in H$. Hal ini disebabkan $K + \ell(x)$ juga merupakan koset dari K di G. Jika $K + g = K + \ell(x)$ maka

$$\begin{aligned} g &\approx \ell(x) \\ g &\equiv \ell(x) \bmod K \\ g - \ell(x) &= a \in K \\ g &= a + \ell(x). \end{aligned}$$

Untuk setiap $x, y \in H$ maka $\ell(x) + \ell(y)$ dan $\ell(xy)$ keduanya merupakan representatif dari koset yang sama, dan jika terdapat suatu elemen $f(x,y) \in K$ dari fungsi $f: H \times H \longrightarrow K$ sedemikian sehingga

$$\ell(x) + \ell(y) = f(x,y) + \ell(xy)$$

untuk setiap $x, y \in H$, maka fungsi f pada persamaan di atas mendefinisikan suatu *factor set* yang berasosiasi dengan lifting untuk pemilihan lifting pada kondisi normal $\ell(1) = 0$.

Berikut adalah definisi *factor set* yang berasosiasi dengan lifting untuk lifting pada kondisi normal $\ell(1) = 0$.

Definisi 3.2.2.1

Jika $\ell: H \to G$ adalah lifting dengan $\ell(1) = 0$ pada perluasan G dari K oleh H, maka suatu *factor set* (*cocycle*) adalah fungsi $f: H \times H \to K$ sedemikian sehingga

$$\ell(x) + \ell(y) = f(x, y) + \ell(xy)$$

untuk setiap $x, y \in H$.

Catatan:

Perkalian pada *factor set* $f: H \times H \to K$ didefinisikan

$$\ell(x)\ell(y) = f(x, y)\ell(xy)$$

untuk setiap $x, y \in H$.

Tentunya, *factor set* bergantung pada pemilihan lifting ℓ. *Factor set* pada perluasan G *realizes the operator* dari K oleh H dengan pemilihan lifting pada kondisi normal yaitu $\ell(1) = 0$ ini disebut sebagai ***factor set* yang ternormalisasi** *(the normalized factor set).*

Saat G merupakan perluasan split, maka lifting ℓ adalah suatu homomorfisma. Karena korespondensi dari *factor set* secara identik adalah 0, maka dapat dikatakan bahwa *factor set* sebagai pengukur kegagalan suatu lifting menjadi homomorfisma. Artinya, *factor set* menggambarkan bagaimana perluasan biasa berbeda dari perluasan split.

Faktanya, dengan memasukan lifting untuk kondisi normal $\ell(1) = 0$ pada Definisi 3.2.2.1 dan dengan sifat asosiatif di G maka dapat ditunjukkan bahwa sifat *factor set* pada Teorema 3.2.1.1 terpenuhi.

Proposisi berikut akan menunjukkan bahwa *factor set* yang ternormalisasi ini akan memenuhi sifat *factor set* pada Teorema 3.2.1.1.

Proposisi 3.2.2.2

Misalkan H grup, K adalah H-modul, dan $0 \to K \to G \to H \to 1$ suatu perluasan yang merealisasikan operator. Jika $\ell: H \to G$ adalah lifting dengan $\ell(1) = 0$ dan $f: H \times H \to K$ adalah suatu *factor set*, maka

(i) $f(1, y) = 0 = f(x, 1)$, untuk setiap $x, y \in H$, di mana 0 identitas di K dan 1 identitas di H.

(ii) Identitas *factor set* (*cocycle*) terpenuhi: Untuk setiap $x, y, z \in H$ maka

$$f(x, y) + f(xy, z) = xf(y, z) + f(x, yz).$$

Bukti:

(i) Ambil $x = 1$, maka berdasarkan Definisi 3.2.2.1 bahwa

$$\begin{aligned} \ell(x) + \ell(y) &= f(x, y) + \ell(xy) \\ \ell(1) + \ell(y) &= f(1, y) + \ell(1y) \\ 0 + \ell(y) &= f(1, y) + \ell(y) \qquad (\ell(1) = 0) \\ \ell(y) &= f(1, y) + \ell(y) \end{aligned}$$

$$\ell(y) - \ell(y) = f(1, y) \qquad (\ell(y) \in G, \text{ di mana } G \text{ grup})$$

$$0 = f(1, y) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Ambil $y = 1$, maka berdasarkan Definisi 3.2.2.1 bahwa

$$\ell(x) + \ell(y) = f(x, y) + \ell(xy)$$

$$\ell(x) + \ell(1) = f(x, 1) + \ell(x1)$$

$$\ell(x) + 0 = f(x, 1) + \ell(x) \qquad (\ell(1) = 0)$$

$$\ell(x) = f(x, 1) + \ell(x)$$

$$\ell(x) - \ell(x) = f(x, 1) \qquad (\ell(x) \in G, \text{ di mana } G \text{ grup})$$

$$0 = f(x, 1) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Dari (a) dan (b) maka $f(1, y) = 0 = f(x, 1)$.

(ii) Dengan sifat asosiatif di G yaitu untuk setiap $x, y, z \in H$

Perhatikan bahwa

$$[\ell(x) + \ell(y)] + \ell(z) = f(x, y) + \ell(xy) + \ell(z)$$

$$= f(x, y) + f(xy, z) + \ell(xyz) \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Perhatikan juga

$$\ell(x) + [\ell(y) + \ell(z)] = \ell(x) + f(y, z) + \ell(yz)$$

$$= xf(y, z) + \ell(x) + \ell(yz) \qquad (\textit{realizes the operator})$$

$$= xf(y, z) + f(x, yz) + \ell(xyz) \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Dari (a) dan (b) maka

$$\begin{aligned} f(x,y) + f(xy,z) + \ell(xyz) &= xf(y,z) + f(x,yz) + \ell(xyz) \\ f(x,y) + f(xy,z) &= xf(y,z) + f(x,yz). \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, Proposisi 3.2.2.2 terbukti.

Dengan demikian, *factor set* yang ternormalisasi pada perluasan *realizes the operator* memenuhi sifat *factor set* secara umum pada perluasan $0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$ dengan K suatu H-modul.