BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini membahas deskripsi masalah, model *open capacitated vehicle routing problem*, model *robust counterpart open capacitated vehicle routing problem*, dan penyelesaian menggunakan himpunan ketidakpastian.

3.1. Deskripsi Masalah

Open Capacitated Vehicle Routing Problem (OCVRP) adalah masalah penentuan rute sejumlah kendaraan dari sebuah depot awal ke sejumlah pelanggan untuk mengantar atau menjemput barang lalu berakhir ke sebuah depot lainnya. Setiap kendaraan mempunyai batasan kapasitas barang yang diangkut. Setiap pelanggan dikunjungi tepat satu kali oleh sebuah kendaraan. Pada penelitian ini diasumsikan bahwa waktu tempuh dari antar dua lokasi bersifat tidak pasti. Masalah ini dikenal dengan sebutan masalah ketidakpastian OCVRP dan termasuk dalam kategori masalah optimisasi *robust*.

Pada penelitian ini, masalah ketidakpastian OCVRP akan diselesaikan dengan *robust counterpart*. *Robust counterpart* merupakan pendekatan untuk mengatasi ketidakpastian dalam optimisasi dengan mempertimbangkan ketiakpastian. *Robust counterpart* bergantung pada pemilihan himpunan ketidakpastian data yang akan membantu mengubah *robust counterpart* menjadi formulasi yang *tractable*.

3.2. Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Studi Pustaka

   Pada tahap ini, dilakukan studi pustaka dengan cara mempelajari dan mengutip konsep atau teori-teori mengenai OCVRP, optimisasi *robust*, *robust counterpart*, dan metode *Branch and Bound* yang bersumber dari berbagai literatur baik jurnal, buku, dan karya tulis lainnya.

2. Pengumpulan Data

   Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data lokasi pelanggan, data muatan yang akan diangkut pada setiap pelanggan, data banyaknya kendaraan, data kapasitas kendaraan, dan data jarak dan waktu tempuh antar pelanggan.

3. Pembangunan Model

   Pada tahap ini, dilakukan pembangunan model OCVRP dengan terlebih dahulu dengan mendefinisikan parameter dan variabel keputusannya. Model OCVRP tersebut kemudian diturunkan menjadi model *robust counterpart*.

4. Penyelesaian Model

   Pada tahap ini, model *robust counterpart* OCVRP diselesaikan dengan mengambil himpunan ketidakpastian *box* dan *ellipsoidal*.

5. Implementasi

   Model diimplementasikan pada rute pengangkutan sampah dengan tujuan meminimumkan waktu tempuh dengan kapasitas pengangkutan kendaraan semaksimal mungkin.

6. Penarikan Kesimpulan

   Pada tahap ini, dilakukan penarikan kesimpulan terhadap penelitian yang telah dilakukan.

3.3. Model *Open Capacitated Vehicle Routing Problem* (OCVRP)

Untuk keperluan pemodelan OCVRP, terlebih dahulu didefinisikan himpunan dan parameter yang digunakan untuk model optimisasi. Misalkan:

i, j adalah indeks untuk himpunan pelanggan.

$K = \{k_1, k_2 \dots, k_m\}$ adalah himpunan kendaraan.

Q adalah kapasitas maksimal kendaraan.

q_i adalah banyaknya muatan yang harus diangkut di pelanggan i.

t_{ij} adalah waktu tempuh dari pelanggan i ke pelanggan j.

Adapun variabel keputusan didefinisikan sebagai berikut:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{jika ada perjalanan dari pelanggan } i \text{ ke pelanggan } j \text{ oleh kendaraan } k \\ 0, \text{jika tidak ada perjalanan dari pelanggan } i \text{ ke pelanggan } j \text{ oleh kendaraan } k \end{cases}$$

Setelah mendefinisikan parameter dan variabel yang terlibat dalam model, maka akan dilanjutkan dengan perumusan fungsi tujuan dan kendala model. Fungsi tujuan dari model optimasi adalah meminimumkan total waktu tempuh kendaraan. Fungsi ini dapat ditulis sebagai:

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(t_{ij}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk}\right) \tag{3.1}$$

Adapun kendala dari model optimisasi adalah sebagai berikut:

1. Setiap kendaraan akan memulai perjalanannya dari depot awal, tidak ada perjalanan yang kembali ke depot awal, dan tidak ada perjalanan dari depot awal ke depot akhir.

$$\sum_{j=2}^{n-1} x_{1jk} = 1\,, \forall k \in K \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=2}^{n} x_{i1k} = 0\,, \forall k \in K \tag{3.3}$$

$$x_{1jk} = 0, j = n; \forall k \in K \tag{3.4}$$

2. Setiap kendaraan mengakhiri perjalanannya pada depot akhir dan tidak ada perjalanan yang berasal dari depot akhir.

$$\sum_{i=2}^{n} x_{ijk} = 1\,, j = n; i \neq j; \forall k \in K \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 0\,, i = n; i \neq j; \forall k \in K \tag{3.6}$$

3. Setiap pelanggan hanya dikunjungi tepat satu kali oleh kendaraan yang sama dan tidak dapat kembali lagi ke pelanggan tersebut.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} = 1\,, j = 2,3, \dots, n-1; i \neq j \tag{3.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} = 1\,, i = 2,3, \dots, n-1; i \neq j \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} + x_{jik} \leq 1, i = 2,3, \dots n-1; j = 2,3, \dots, n-1, i \neq j \tag{3.9}$$

4. Setiap kendaraan meninggalkan pelanggan yang telah dikunjungi.

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_{ipk} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{pjk} = 0, p = 2,3, \dots, n-1; i \neq p; j \neq p; \forall k \in K \tag{3.10}$$

5. Perjalanan dari depot awal tidak dapat langsung berakhir ke depot akhir.

$$x_{1pk} + x_{pjk} \leq 1, p = 2,3, \dots, n-1; j = n, \forall k \in K \tag{3.11}$$

6. Total jumlah pengangkutan barang pada setiap pelanggan dalam setiap rute yang dibentuk tidak melebihi kapasitas kendaraan yang melayani rute tersebut.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i x_{ijk} \leq Q\,, i \neq j; \forall k \in K \tag{3.12}$$

Karena variabel keputusan bernilai 0 atau 1, maka batasan variabel untuk model dapat ditulis sebagai:

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \forall i, j \in N, \forall k \in K \tag{3.13}$$

Pada penelitian ini diasumsikan bahwa nilai t_{ij} adalah parameter yang nilainya tidak pasti. Oleh karena itu, model optimisasi di atas termasuk dalam kriteria model optimisasi tak tentu. Solusi optimal yang ingin dicari dari penyelesaian model optimisasi tersebut adalah solusi yang tidak terpengaruh pada perubahan nilai t_{ij}. Solusi ini disebut sebagai solusi *robust.*

3.4. Model *Robust Counterpart Open Capacitated Vehicle Routing Problem* (RC-OCVRP)

Robust counterpart adalah formulasi matematis yang digunakan untuk mencari solusi yang *robust* dalam masalah optimisasi dengan mempertimbangkan ketidakpastian data (Ben-Tal, Ghaoui, & Nemirovski, 2009). Penelitian ini akan menggunakan pendekatan *robust counterpart* untuk menyelesaikan masalah optimisasi OCVRP. *Robust counterpart* diselesaikan dengan memilih himpunan ketidakpastian yang akan digunakan dan merekontruksi fungsi objektif agar model optimisasi menjadi *tractable*.

Penelitian ini mengasumsikan jika parameter waktu tempuh adalah parameter yang nilainya tidak pasti. Oleh karena itu, diperlukan tambahan batasan variabel berikut:

$$t_{ij} \in U$$

dimana U adalah sebuah himpunan ketidakpastian. Dengan demikian, model optimisasi tak tentu dapat dirumuskan dalam model sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(t_{ij}\sum_{k=1}^{m}x_{ijk}\right)$$

Terhadap:

$$\sum_{j=2}^{n-1}x_{1jk} = 1\,, \forall k \in K$$

$$\sum_{i=2}^{n}x_{i1k} = 0\,, \forall k \in K$$

$$x_{1jk} = 0, j = n; \forall k \in K$$

$$\sum_{i=2}^{n}x_{ijk} = 1\,, j = n; i \neq j; \forall k \in K$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ijk} = 0\,, i = n; i \neq j; \forall k \in K$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}x_{ijk} = 1\,, \forall j = 2,3, \dots, n-1; i \neq j$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}x_{ijk} = 1\,, \forall i = 2,3, \dots, n-1; i \neq j$$

$$\sum_{k=1}^{m}x_{ijk} + x_{jik} \leq 1, i = 2,3, \dots n-1; j = 2,3, \dots, n-1, i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ipk} - \sum_{j=2}^{n}x_{pjk} = 0, \forall k \in K; \forall p = 2,3, \dots, n-1; i \neq p; j \neq p$$

$$x_{1pk} + x_{pjk} \leq 1, p = 2,3, \dots, n-1; j = n, \forall k \in K$$

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}q_i x_{ijk} \leq Q\,, \forall k \in K; i \neq j$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \forall i, j \in N, \forall k \in K$$

$$t_{ij} \in U$$

Pada model di atas terdapat unsur ketidakpastian pada fungsi objektif sehingga akan direkontruksi dengan mengganti variabel tak tentu menjadi sebuah variabel tentu. Variabel tentu dapat dimisalkan dengan l sehingga model *robust counterpart* dari masalah OCVRP dapat ditulis sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$l$$

Terhadap:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(t_{ij}\sum_{k=1}^{m}x_{ijk}\right) \leq l \tag{3.14}$$

$$\sum_{j=2}^{n-1} x_{1jk} = 1\,, \forall k \in K$$

$$\sum_{i=2}^{n} x_{i1k} = 0\,, \forall k \in K$$

$$x_{1jk} = 0, j = n; \forall k \in K$$

$$\sum_{i=2}^{n} x_{ijk} = 1\,, j = n; i \neq j; \forall k \in K$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 0\,, i = n; i \neq j; \forall k \in K$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} = 1\,, \forall j = 2,3, \dots, n; i \neq j$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} = 1\,, \forall i = 2,3, \dots, n-1; i \neq j$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} + x_{jik} \leq 1, i = 2,3, \dots n-1; j = 2,3, \dots, n-1, i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_{ipk} - \sum_{j=2}^{n-1} x_{pjk} = 0, \forall k \in K; \forall p = 2,3, \dots, n; i \neq p; j \neq p$$

$$x_{1pk} + x_{pjk} \leq 1, p = 2,3, \dots, n-1; j = n, \forall k \in K$$

$$\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1} q_i x_{ijk} \leq Q\,, \forall k \in K; i \neq j$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \forall i, j \in N, \forall k \in K$$

$$t_{ij} \in U$$

Dalam menyelesaikan model *robust counterpart*, akan ditentukan terlebih dahulu himpunan ketidakpastiannya. Dalam penelitian ini, himpunan ketidakpastian yang digunakan adalah himpunan ketidakpastian *box* dan himpunan ketidakpastian *ellipsoidal*. Himpunan U dengan himpunan ketidakpastian *box* didefinisikan sebagai berikut:

$$U = \{t: t = \bar{t} + P\xi, \|\xi\|_\infty \leq 1\} \tag{3.15}$$

dengan

t: waktu tempuh

$\bar{t}$: vektor waktu tempuh

P: matriks pembangkit

ξ: vektor tak tentu

Himpunan U dengan himpunan ketidakpastian *ellipsoidal* didefinisikan sebagai berikut:

$$U = \{t: t = \bar{t} + P\xi, \|\xi\|_2 \leq 1\} \tag{3.16}$$

3.5. Penyelesaian Model *Robust Counterpart Open Capacitated Vehicle Routing Problem* (RC-OCVRP) dengan Himpunan Ketidakpastian *Box*

Pada subbab ini, dijelaskan mengenai model RC-OCVRP dengan waktu tempuh tak pasti berada dalam himpunan ketidakpastian *box*. Model RC-OCVRP dengan himpunan ketidakpastian *box* diperoleh dengan menerapkan himpunan ketidakpastian *box* (3.15) pada pertidaksamaan (3.14), sehingga diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(t_{ij}\sum_{k=1}^{m}x_{ijk}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\bar{t}_{ij} + P\xi\right)\sum_{k=1}^{m}x_{ijk}\right)$$

$$= (\bar{t} + P\xi)^T\mathbf{x} \leq l, \forall\xi: \|\xi\|_\infty \leq 1 \tag{3.17}$$

atau dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\max_{\xi:\|\xi\|_\infty\leq 1}(\bar{t} + P\xi)^T\mathbf{x} = \bar{t}^T x + \max_{\xi:\|\xi\|_\infty\leq 1}(P^T\mathbf{x})^T\xi \leq l \tag{3.18}$$

Karena norm-1 dari vektor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai penjumlahan dari nilai absolut tiap anggotanya, yaitu (Hunter, 2014):

$$\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$$

dan norm-∞ merupakan entri dengan nilai maksimal pada nilai absolutnya, yaitu:

$$\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\}$$

maka diperoleh:

$$\max_{\xi:\|\xi\|_\infty \le 1} (P^T\mathbf{x})^T \xi = \max_{\xi:\|\xi\|_\infty \le 1} \sum_i (P^T\mathbf{x})_i \xi_i = \sum_i |(P^T\mathbf{x})_i| = \|P^T\mathbf{x}\|_1$$

Dengan demikian, pertidaksamaan (3.17) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\bar{t}^T x + \|P^T\mathbf{x}\|_1 \le l \tag{3.19}$$

atau

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(t_{ij}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} + \sum_{k=1}^{m}\left\|Px_{ijk}\right\|_1\right) \le l \tag{3.20}$$

Jadi, model *robust counterpart* dari masalah OCVRP dengan waktu tempuh tak pasti menggunakan himpunan ketidakpastian *box* adalah sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$l$$

Terhadap:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\bar{t}_{ij}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} + \sum_{k=1}^{m}\left\|Px_{ijk}\right\|_1\right) \le l$$

$$\sum_{j=2}^{n-1} x_{1jk} = 1\,, \forall k \in K$$

$$\sum_{i=2}^{n} x_{i1k} = 0\,, \forall k \in K$$

$$x_{1jk} = 0, j = n; \forall k \in K$$

$$\sum_{i=2}^{n} x_{ijk} = 1\,, j = n; i \ne j; \forall k \in K$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 0\,, i = n; i \ne j; \forall k \in K$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} = 1\,, \forall j = 2,3, \dots, n; i \ne j$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} = 1\,, \forall i = 2,3, \dots, n-1; i \neq j$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} + \sum_{k=1}^{m} x_{jik} \leq 1, i = 1,2, \dots n; j = 1,2, \dots, n, i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_{ipk} - \sum_{j=2}^{n-1} x_{pjk} = 0, \forall k \in K; \forall p = 2,3, \dots, n; i \neq p; j \neq p$$

$$x_{1pk} + x_{pjk} \leq 1, p = 2,3, \dots, n-1; j = n, \forall k \in K$$

$$\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1} q_i x_{ijk} \leq Q\,, \forall k \in K; i \neq j$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \forall i, j \in N, \forall k \in K$$

$$t_{ij} \in U$$

Dapat dilihat bahwa formulasi *robust counterpart* (3.20) merupakan kendala linear sehingga model *robust counterpart* dari OCVRP menggunakan himpunan ketidakpastian *box* bersifat *computationally tractable*.

3.6. Penyelesaian Model *Robust Counterpart Open Capacitated Vehicle Routing Problem* (RC-OCVRP) dengan Himpunan Ketidakpastian *Ellipsoidal*

Pada subbab ini, dijelaskan mengenai model *robust counterpart* dengan waktu tempuh tak pasti berada dalam himpunan ketidakpastian *ellipsoidal*. Model *robust counterpart* dengan himpunan ketidakpastian *ellipsoidal* diperoleh dengan menerapkan himpunan ketidakpastian *ellipsoidal* (3.16) pada pertidaksamaan (3.14), sehingga diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(t_{ij}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\bar{t}_{ij} + P\xi\right)\sum_{k=1}^{m} x_{ijk}\right)$$

$$= (\bar{t} + P\xi)^T \mathbf{x} \leq l, \forall \xi : \|\xi\|_2 \leq 1 \qquad (3.21)$$

atau dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$\max_{\xi:\|\xi\|_2 \leq 1} (\bar{t} + P\xi)^T \mathbf{x} = \bar{t}^T x + \max_{\xi:\|\xi\|_2 \leq 1} (P^T \mathbf{x})^T \xi \leq l \qquad (3.22)$$

Perhatikan bahwa untuk suatu $\mathbf{x} = \left(x_{ijk}\right)$ maka nilai terbaik pada kasus terburuk untuk pertidaksamaan di atas tercapai ketika dipilih vektor satuan

$$\xi = \frac{P^T \boldsymbol{x}}{\|P^T \boldsymbol{x}\|_2}$$

Karena norm-2 dari vektor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai (Hunter, 2014):

$$\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

maka diperoleh

$$\max_{\xi:\|\xi\|_2 \le 1} (P^T \mathbf{x})^T \xi = \frac{(P^T \mathbf{x})^T (P^T \mathbf{x})}{\|P^T \mathbf{x}\|_2} = \frac{(P^T \mathbf{x})^2}{\sqrt{(P^T \mathbf{x})^2}} = \sqrt{(P^T \mathbf{x})^2} = \|P^T \mathbf{x}\|_2$$

Dengan demikian, pertidaksamaan (3.21) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\bar{t}^T x + \|P^T \mathbf{x}\|_2 \le l \tag{3.23}$$

atau

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(t_{ij} \sum_{k=1}^{m} x_{ijk} + \sum_{k=1}^{m} \left\| P x_{ijk} \right\|_2 \right) \le l \tag{3.24}$$

Jadi, formulasi *robust counterpart* dari masalah OCVRP dengan waktu tempuh tak pasti menggunakan himpunan ketidakpastian *ellipsoidal* adalah sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$l$$

Terhadap:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\bar{t}_{ij} \sum_{k=1}^{m} x_{ijk} + \sum_{k=1}^{m} \left\| P x_{ijk} \right\|_2 \right) \le l$$

$$\sum_{j=2}^{n-1} x_{1jk} = 1\,, \forall k \in K$$

$$\sum_{i=2}^{n} x_{i1k} = 0\,, \forall k \in K$$

$$x_{1jk} = 0, j = n; \forall k \in K$$

$$\sum_{i=2}^{n} x_{ijk} = 1\,, j = n; i \ne j; \forall k \in K$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 0\,, i = n; i \neq j; \forall k \in K$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} = 1\,, \forall j = 2,3, \dots, n; i \neq j$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} = 1\,, \forall i = 2,3, \dots, n-1; i \neq j$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} + \sum_{k=1}^{m} x_{jik} \leq 1, i = 1,2, \dots n; j = 1,2, \dots, n, i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_{ipk} - \sum_{j=2}^{n-1} x_{pjk} = 0, \forall k \in K; \forall p = 2,3, \dots, n; i \neq p; j \neq p$$

$$x_{1pk} + x_{pjk} \leq 1, p = 2,3, \dots, n-1; j = n, \forall k \in K$$

$$\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1} q_i x_{ijk} \leq Q\,, \forall k \in K; i \neq j$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \forall i, j \in N, \forall k \in K$$

$$t_{ij} \in U$$

Dapat dilihat bahwa formulasi *robust counterpart* (3.24) merupakan kendala *conic quadratic* sehingga model *robust counterpart* dari OCVRP menggunakan himpunan ketidakpastian *ellipsoidal* bersifat *computationally tractable*.