BAB III
METODE PENELITIAN

Bab ini membahas deskripsi masalah, metodologi penelitian, data yang digunakan, model optimasi, dan teknik penyelesaian menggunakan Metode *Branch and Price* dalam masalah penugasan *multi-objective*.

3.1. Deskripsi Masalah

Penelitian ini membahas masalah penugasan m buah pekerja ke n buah tugas sedemikian sehingga seluruh pekerjaan dapat ditugaskan ke pekerja yang ada. Diasumsikan setiap pekerja paling sedikit memperoleh satu buah tugas. Masalah penugasan tersebut diselesaikan dengan tujuan untuk meminimumkan biaya pekerja, dan waktu penyelesain tugas, serta memaksimumkan pendapatan. Masalah ini dikenal dengan istilah masalah penugasan *multi-objective*. Penelitian ini mengasumsikan bahwa setiap pekerja memiliki kemampuan yang sama, tetapi biaya dan waktu operasi dalam menjalankan dan menyelesaikan setiap tugas berbeda-beda. Oleh karena itu, perlu dilakukan penilaian kinerja yang tepat dalam menentukan tugas untuk pekerja agar mendapatkan posisi tugas yang tepat dan optimal dalam melakukan tugas. Penelitian ini akan menyelesaikan masalah penugasan *multi-objective* untuk meminimumkan waktu produksi, total biaya pekerja, dan memaksimumkan total pendapatan dengan menggunakan Metode *Branch and Price.*

3.2. Tahapan Penelitian

Penelitian ini dilakukan melalui tahapan-tahapan berikut:

1. **Studi Pustaka**

   Pada tahap ini dilakukan studi pustaka dengan cara mempelajari konsep serta teori-teori mengenai masalah penugasan *multi-objective* dan Metode *B&P,* bersumber pada berbagai literatur baik jurnal, buku, dan karya tulis lainnya.

2. **Pengumpulan Data**

   Data-data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder, yaitu data yang sudah tercatat dan diolah oleh suatu perusahaan. Selain itu diperlukan data penunjang yang diperoleh dari hasil observasi di suatu perusahaan Konveksi.

Data-data yang dibutuhkan dalam penelitian ini terdiri dari data total pekerja yang akan menyelesaikan tugas dalam proses produksi di konveksi, data jumlah tugas dan tugas apa saja yang akan dikerjakan oleh setiap pekerja, data biaya yang dikeluarkan untuk pekerja jika menyelesaikan tugas, data waktu yang dibutuhkan setiap pekerja untuk menyelesaikan setiap tugas yang diselesaikan, dan data pendapatan yang diperoleh dari hasil produksi.

3. **Pemodelan**

   Pada tahap ini dibangun model optimasi dari masalah penugasan *multi-objective* dengan terlebih dahulu mendefinisikan himpunan, parameter, dan variabel keputusan dari model optimasi.

4. **Penyelesaian Model**

   Pada tahapan ini, model optimasi dari masalah penugasan *multi-objective* akan diselesaikan dengan menggunakan Metode *B&P*.

5. **Implementasi**

   Setelah model dan teknik penyelesaian valid, selanjutnya model dan teknik penyelesaian tersebut akan diimplementasikan pada penyelesaian masalah penugasan *multi-objective* pada pekerja konveksi dengan menggunakan Metode *B&P*.

6. **Penarikan Kesimpulan**

   Pada tahapan ini, dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil implementasi penyelesaian masalah penugasan *multi-objective* menggunakan Metode *B&P*.

3.3. Model Optimasi Masalah Penugasan *Multi-Objective*

Model optimasi masalah penugasan *multi-objective* dalam penelitian ini, dibangun dengan asumsi-asumsi berikut:

1. Setiap tugas dikerjakan tepat oleh satu pekerja.
2. Waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan seluruh tugas yang diberikan pada pekerja tidak boleh melebihi kapasitas tugas dari pekerja.

Untuk kepentingan pembangunan model optimasi, didefinisikan himpunan dan parameter model sebagai berikut:

I: Himpunan tugas.

J: Himpunan pekerja.

c_{ij}: biaya yang dikeluarkan jika pekerja j $m$engerjakan tugas i.

h_{ij}: $w$aktu yang diperlukan pekerja j mengerjakan tugas i.

q_{ij}: $p$endapatan yang diperoleh jika pekerja j jika menyelesaikan tugas i.

w_{ij}: bobot tugas i pada pekerja j.

d_j: $k$apasitas maksimal dari pekerja j.

Untuk n buah tugas dan m buah pekerja, parameter-parameter di atas dapat dituliskan seperti pada Tabel 3.1. Variabel keputusan model menentukan pekerja mana yang menyelesaikan setiap tugas yang ada. Variabel ini didefinisikan sebagai berikut:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{jika tugas } i \text{ dikerjakan pekerja } j, \\ 0, \text{jika tugas } i \text{ tidak dikerjakan pekerja } j. \end{cases}$$

Tabel 3. 1 Parameter Masalah Penugasan *Multi-Objective*.

Kriteria	Tugas (i)	Pekerja (j)			
		1	2	…	m
Biaya C_{ij}	1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1m}
	2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2m}
	…	…	…	…	…
	n	C_{n1}	C_{n2}	…	C_{nm}
Waktu H_{ij}	1	H_{11}	H_{12}	…	H_{1m}
	2	H_{21}	H_{22}	…	H_{2m}
	…	…	…	…	…
	n	H_{n1}	H_{n2}	…	H_{nm}
Pendapatan Q_{ij}	1	Q_{11}	Q_{12}	…	Q_{1m}
	2	Q_{21}	Q_{22}	…	Q_{2m}
	…	…	…	…	…
	n	Q_{n1}	Q_{n2}	…	Q_{nm}

Setelah pendefinisian parameter dan variabel, selanjutnya adalah merumuskan model. Model optimasi untuk permasalahan ini terdiri dari beberapa fungsi tujuan dan beberapa fungsi kendala. Fungsi tujuan pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Meminimumkan total biaya pekerja

   Fungsi tujuan ini diekspresikan sebagai:

   Meminimumkan:

$$z_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \tag{3.1}$$

2. Meminimumkan waktu produksi

   Fungsi tujuan ini dituliskan sebagai:

   Meminimumkan:

$$z_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h_{ij} x_{ij} \tag{3.2}$$

3. Memaksimumkan total pendapatan

   Fungsi tujuan ini dinotasikan sebagai berikut:

   Memaksimumkan:

$$z_3 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} q_{ij} x_{ij} \tag{3.3}$$

Adapun kendala dari model adalah sebagai berikut:

1. Setiap tugas dikerjakan tepat oleh satu pekerja.

   Kendala ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \ , \ \ i = 1,2,3, \dots, n \tag{3.4}$$

2. Total waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan seluruh tugas yang diberikan pada pekerja *j* tidak boleh melebihi kapasitas waktu kerja dari pekerja tersebut. Kendala ini dapat dinyatakan sebagai persamaan:

$$\sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_{ij} \leq d_j \ \ \ j = 1,2, \dots, m \tag{3.5}$$

Batasan variabel dari model menyatakan bahwa variabel keputusan model bernilai 0 dan 1. Batasan ini dapat dituliskan sebagai:

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Model optimasi di atas termasuk ke dalam kategori model *binary integer programming*, yaitu model *linear programming* yang mengharuskan variabelnya bernilai biner (0 atau 1). Pada sub bab selanjutnya akan dijelaskan teknik penyelesaian dari model di atas.

3.4. Penyelesaian Model dengan Metode *Branch-and-Price*

Salah satu cara untuk menyelesaikan masalah penugasan *multi-objective* adalah dengan mencari semua kemungkinan penugasan yang *feasible*. Tetapi, banyaknya solusi feasible awal dari masalah penugasan tersebut meningkat secara eksponensial seiring bertambahnya jumlah pekerja dan banyaknya tugas yang ada. Jika seluruh penugasan yang *feasible* tersebut dilibatkan pada model optimasi, maka matriks koefisien dari fungsi kendala dari model optimasinya akan melibatkan variabel yang banyak sekali. Hal ini akan mengakibatkan waktu komputasi yang diperlukan untuk menyelesaikan model optimasi membutuhkan waktu yang sangat lama. Oleh karena itu diperlukan metode yang efisien dalam menyelesaikan masalah penugasan.

Penelitian ini akan menggunakan Metode *B&P* untuk menyelesaikan masalah penugasan *multi-objective*. Metode ini merupakan gabungan dari teknik *column generation* dan Metode *Branch and Bound,* di mana Metode *Branch and Bound* ditambahkan pada teknik *column generation* untuk mendapatkan solusi bilangan bulat. Secara umum, terdapat empat langkah kerja dari Metode *B&P*, yaitu membangun *master problem*, menyelesaikan *restricted master problem*, menyelesaikan percabangan, dan menyelesaikan *subproblem.*

Langkah awal dalam Metode *B&P* adalah pembentukan *master problem. Master problem* adalah suatu model yang dibangun berdasarkan sebagian solusi *feasible* untuk permasalahan penugasan. Solusi *feasible* adalah himpunan dari semua x yang memenuhi persamaan (3.5). Misalkan S merupakan himpunan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S = \left\{ x : \sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_{ij} \leq d_j, j = 1,2,\dots,m \right\}$$

S merupakan solusi dari *knapsack problem* bagi setiap pekerja. Misalkan *knapsack problem* bagi pekerja j dinotasikan dengan KP_j. Misal himpunan untuk solusi *feasible* adalah $S = \{z_1^1, \dots, z_1^{k_1}, \dots, z_m^1, \dots, z_m^{k_m}\}$ di mana $z_j^k = \left(z_{1j}^k, z_{2j}^k, \dots, z_{nj}^k\right)^T$

merupakan semua solusi *feasible* yang memenuhi KP_j dan z_{1j}^k adalah kemungkinan solusi pekerja j yang mengerjakan tugas i dan K_j merupakan banyaknya solusi *feasible* yang mungkin untuk permasalahan KP_j. Maka untuk setiap $x \in \{0,1\}$ bisa dituliskan sebagai berikut:

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{k_j} z_{ij}^k \lambda_j^k \tag{3.6}$$

$$\sum_{k=1}^{k_j} \lambda_j^k = 1, j = 1,2, \dots, m$$

$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, k = 1,2, \dots, K_j, j = 1,2, \dots, m, \quad x_{ij} \in \{0,1\}$$

dengan λ_j^k merupakan variabel keputusan dari solusi *feasible* awal yang dikerjakan oleh pekerja. Selanjutnya, substitusi Persamaan (3.6) ke Model Optimasi (3.1), (3.2), dan (3.3). Maka diperoleh fungsi tujuan dari *master problem* untuk masalah penugasan *multi-objective* sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$z_1 = \sum_{j-1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} (\sum_{i=1}^{n} c_{ij} z_{ij}^k) \lambda_j^k$$

Meminimumkan:

$$z_2 = \sum_{j-1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} (\sum_{i=1}^{n} h_{ij} z_{ij}^k) \lambda_j^k$$

Memaksimumkan:

$$z_3 = \sum_{j-1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} (\sum_{i=1}^{n} q_{ij} z_{ij}^k) \lambda_j^k$$

Terhadap:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} z_{ij}^k \lambda_j^k = 1, \;\; i = 1,2, \dots, n$$

$$\sum_{k=1}^{k_j} \lambda_j^k = 1, \;\; j = 1,2, \dots, n$$

$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, \ \ k = 1,2,\dots,K_j, \quad j = 1,2,\dots,n$$

Model optimasi tersebut selanjutnya disebut sebagai *master problem*.

Pada penelitian ini, model *multi-objective* dari *master problem* diselesaikan dengan Metode *Weighted-sum* yang di mana tiga fungsi tujuan akan dikonversi menjadi fungsi tujuan tunggal yaitu meminimumkan fungsi tujuan dengan cara mengalikan fungsi tujuan memaksimumkan dengan negatif satu (-1), dan memberikan bobot pada masing-masing fungsi tujuan. Sehingga diperoleh *master problem* yang baru sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$z = \sum_{j-1}^{n} \sum_{k=1}^{k_j} (w_1 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_{ij}^k + w_2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} z_{ij}^k - w_3 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} z_{ij}^k) \lambda_j^k \quad (3.7)$$

Terhadap:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{k_j} z_{ij}^k \lambda_j^k = 1, \ \ i = 1,2,\dots,m \quad (3.8)$$

$$\sum_{k=1}^{k_j} \lambda_j^k = 1, \ \ j = 1,2,\dots,n \quad (3.9)$$

$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, \ \ k = 1,2,\dots,K_j, \quad j = 1,2,\dots,n$$

Setelah mengkonversi tiga fungsi tujuan menjadi fungsi tujuan tunggal dan terbentuk *master problem* yang baru, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan *restricted master problem* (*RMP*). Salah satu cara dalam membangun *RMP* adalah dengan membangkitkan sebagian kolom secara acak pada *master problem* yang mungkin dapat mengoptimalkan fungsi tujuan. Kemudian bentuk *RMP* di relaksasi dengan cara mengubah tanda $' = '$ pada fungsi kendala menjadi $' \geq '$. Setelah model direlaksasi, *RMP* berubah menjadi permasalahan *Linear Programming* yang dapat diselesaikan dengan Metode Simpleks yang direvisi untuk menghasilkan *shadow price.*

Setelah mencapai keadaan optimal dan mendapatkan *shadow price,* langkah berikutnya adalah memeriksa apakah variabel keputusan memiliki nilai *integer* atau *non integer*. Jika variabel keputusannya bernilai *non integer,* maka Metode *Branch* *and Bound* akan diterapkan. Namun, jika variabel keputusannya sudah bernilai *integer*, maka dilanjutkan ke tahap selanjutnya, yaitu menyelesaikan *subproblem.*

Subproblem dikonstruksi untuk membangkitkan sebuah kolom atau variabel baru yang akan ditambahkan ke *RMP* jika kondisi optimal pada *subproblem* belum tercapai. Kondisi optimal tercapai jika *reduce cost* dari setiap variabel tidak ada yang negatif. Nilai *reduced cost* $\bar{c}_N$ yang bersesuaian dengan variabel *non basis* dihitung sebagai $\bar{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N$ Misalkan $\lambda = (\lambda_B, \lambda_N)$ adalah solusi *feasible*. Selanjutnya solusi primal diperoleh dengan menghitung $B^{-1}b$ dan solusi dual dari $\hat{c}_B^T B^{-1} = (u_i, v_j)$ dengan u_i adalah solusi dual (*shadow price*) yang berkorespondensi dengan fungsi kendala tugas i dan v_j adalah solusi dual yang berkorespondensi dengan fungsi kendala pekerja *j*. Nilai fungsi tujuan dihitung sebagai $\hat{c}_B^T B^{-1} b$, di mana $\hat{c}_B^T$ adalah vektor profit dari variabel dasar dengan *profit* $\hat{c} = \hat{c}_B^T B^{-1}$untuk setiap λ_j. Solusi dual dari master problem, yaitu $\hat{c}_B^T B^{-1} = (u_i, v_j)$, digunakan untuk membangun fungsi tujuan dari *subproblem.* Sehingga model dari *subproblem* untuk setiap pekerja *j* (KP_j) dinyatakan sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$z = \sum_i (c_{ij} - u_i) x_{ij} - v_j$$

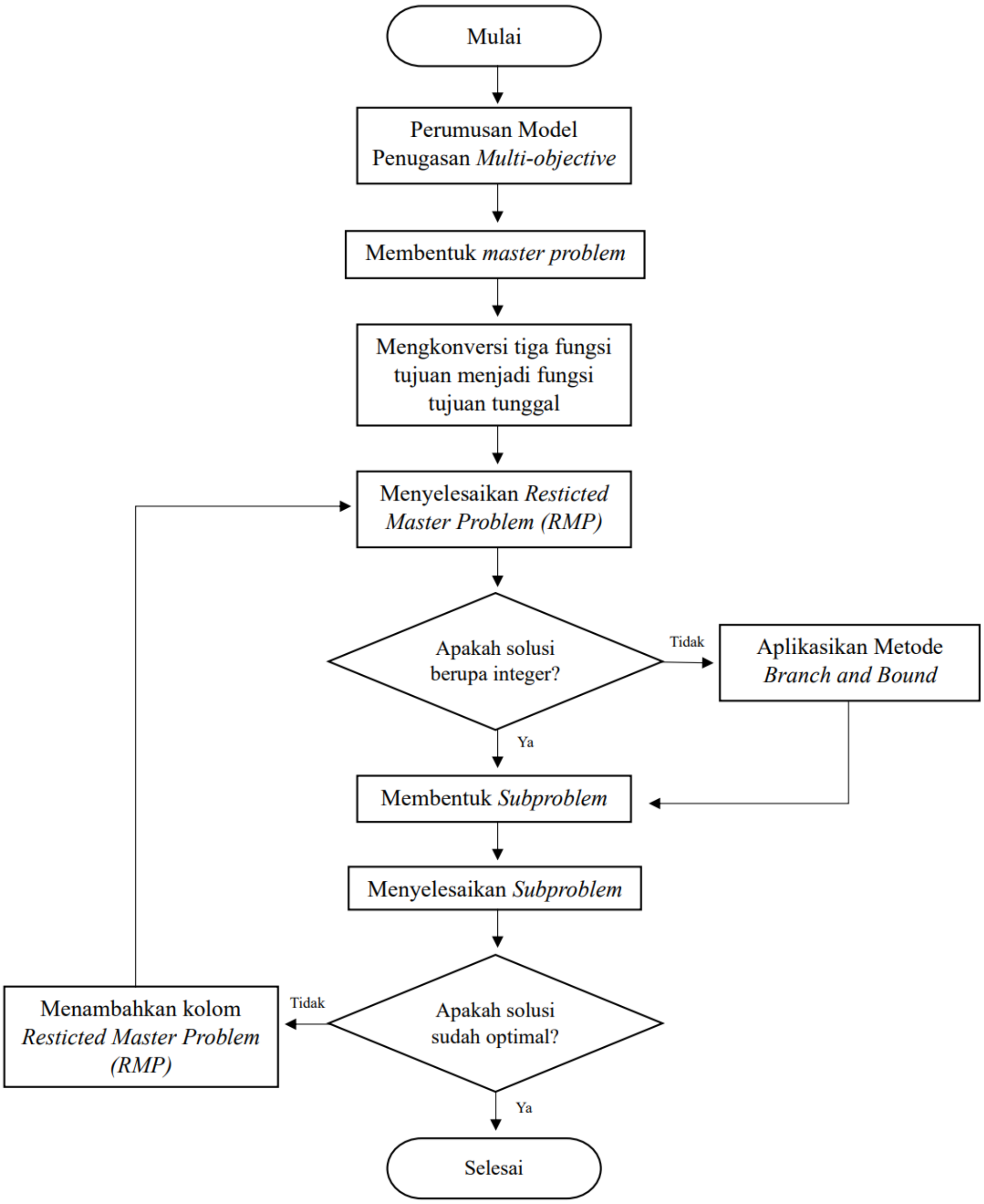
Dengan kendala:

$$\sum_i w_{ij} x_{ij} \leq d_j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Subproblem untuk setiap pekerja digunakan untuk mencari solusi yang meminimumkan *reduce cost* dengan kendala bahwa setiap tugas dikerjakan oleh tepat satu pekerja, dan total waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan seluruh tugas. Kolom hasil dari penyelesaian *subproblem* kemudian akan ditambahkan ke *RMP* untuk diselesaikan kembali. Langkah-langkah ini akan diulang sampai tidak ada *reduce cost* yang bernilai negatif, sehingga diperoleh solusi optimal dari masalah penugasan.

Selengkapnya Langkah kerja Metode *B&P* dapat dilihat dari *flowchart* berikut:



Gambar 3. 1 *Flowchart* penyelesaian Metode *Branch and Price*

3.5. Contoh Implementasi Metode *Branch and Price* untuk masalah penugasan *multi-objective.*

Berikut diberikan contoh langkah-langkah Metode *B&P* untuk menyelesaikan masalah penugasan *multi-objective.* Misal terdapat tiga penugasan dan dua pekerja, dengan daftar biaya, waktu, dan pendapatan yang diperlukan pekerja *j* menyelesaikan tugas i disajikan pada Tabel 3.2. Bobot tugas i yang dikerjakan oleh pekerja j disajikan dalam Tabel 3.3. Dalam menyelesaikan tugas-tugas tersebut, setiap pekerja memiliki Batasan kapasitas harian yang bisa diselesaikan. Kapasitas pekerja disajikan pada Tabel 3.4.

Tabel 3. 2 Biaya, waktu dan Pendapatan yang diperlukan pekerja *j* untuk menyelesaikan tugas *i*

Kriteria	Tugas (*i*)	Pekerja (*j*)	
		1	2
Biaya	1	2	2
	2	3	3
	3	2	2
Waktu	1	8	9
	2	11	9
	3	9	10
Pendapatan	1	5	5
	2	8	8
	3	6	6

Tabel 3. 3 Bobot tugas *i* pada pekerja *j*

Tugas (*i*)	Pekerja (*j*)	
	1	2
1	7	4
2	4	6
3	5	4

Tabel 3. 4 Kapasitas Pekerja *j*

Pekerja (*j*)	
1	2
13	11

Berikut adalah langkah-langkah menyelesaikan masalah penugasan pekerja ke tugas yang ada.

Langkah 1: Perumusan Model Optimasi.

Model optimasi untuk masalah penugasan *multi-objective* diatas adalah sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$z_1 = 2x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + 3x_{22} + 2x_{31} + 2x_{32} \quad (3.10)$$

Meminimumkan:

$$z_2 = 8x_{11} + 9x_{12} + 11x_{21} + 9x_{22} + 9x_{31} + 10x_{32} \quad (3.11)$$

Memaksimumkan:

$$z_3 = 5x_{11} + 5x_{12} + 8x_{21} + 8x_{22} + 6x_{31} + 6x_{32} \quad (3.12)$$

Terhadap:

$$x_{11} + x_{12} = 1 \quad (3.13)$$

$$x_{21} + x_{22} = 1 \quad (3.14)$$

$$x_{31} + x_{32} = 1 \quad (3.15)$$

$$7x_{11} + 4x_{21} + 8x_{31} \leq 13 \quad (3.16)$$

$$4x_{12} + 6x_{22} + 4x_{32} \leq 11 \quad (3.17)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2$$

Langkah 2: Pembentukan *master problem*.

Untuk pembentukan *master problem*, maka dicari sebagian solusi *feasible* untuk setiap pekerja. Dari persamaan (3.16), diperoleh solusi *feasible* untuk pekerja 1 sebagai berikut:

$$z_1^k = \{(1,0,0), (1,1,0), (0,1,0), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

Banyaknya solusi yang mungkin untuk pekerja 1 adalah 5, sehingga $K_1 = 5$. Dari persamaan (3.17), diperoleh solusi *feasible* untuk pekerja 2 adalah:

$$z_2^k = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

Banyaknya solusi yang mungkin untuk pekerja 2 adalah 6, sehingga $K_2 = 6$. Pada prakteknya, banyaknya solusi *feasible* untuk setiap pekerja bisa berjumlah banyak sekali. Pada kasus ini, untuk membentuk *master problem* hanya dibutuhkan sebagian kecil dari solusi *feasible* tersebut.

Setelah diperoleh semua solusi yang mungkin untuk setiap pekerja, selanjutnya dibentuk fungsi tujuan dari *master problem* sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$z_1 = \sum_{j-1}^{2} \sum_{k=1}^{k_j} (\sum_{i=1}^{3} c_{ij} z_{ij}^k) \lambda_j^k$$

$$= 2\lambda_1^1 + 5\lambda_1^2 + 3\lambda_1^3 + 5\lambda_1^4 + 2\lambda_1^5 + 2\lambda_2^1 + 5\lambda_2^2 + 4\lambda_2^3 + 3\lambda_2^4 + 5\lambda_2^5 + 2\lambda_2^6$$

Meminimumkan:

$$z_2 = \sum_{j-1}^{2} \sum_{k=1}^{k_j} (\sum_{i=1}^{3} h_{ij} z_{ij}^k) \lambda_j^k$$

$$= 8\lambda_1^1 + 19\lambda_1^2 + 11\lambda_1^3 + 20\lambda_1^4 + 9\lambda_1^5 + 9\lambda_2^1 + 18\lambda_2^2 + 19\lambda_2^3 + 9\lambda_2^4 + 19\lambda_2^5 + 10\lambda_2^6$$

Memaksimumkan:

$$z_3 = \sum_{j-1}^{2}\sum_{k=1}^{k_j}(\sum_{i=1}^{3} q_{ij}z_{ij}^k)\lambda_j^k$$

$$= 5\lambda_1^1 + 13\lambda_1^2 + 8\lambda_1^3 + 14\lambda_1^4 + 6\lambda_1^5 + 5\lambda_2^1 + 13\lambda_2^2 + 11\lambda_2^3 + 8\lambda_2^4 + 14\lambda_2^5 + 6\lambda_2^6$$

Terhadap:

1. Setiap tugas diselesaikan oleh tepat satu pekerja. Kendala ini dapat diekspresikan sebagai:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j} z_{ij}^k\lambda_j^k = 1,\ \ i = 1,2,\dots,n$$

atau

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^2 + 0 + 0 + 0 + \lambda_2^1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^3 + 0 + 0 + 0 = 1$$
$$0 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 + \lambda_1^4 + 0 + 0 + \lambda_2^2 + 0 + \lambda_2^4 + \lambda_2^5 + 0 = 1$$
$$0 + 0 + 0 + \lambda_1^4 + \lambda_1^5 + 0 + 0 + \lambda_2^3 + 0 + \lambda_2^5 + \lambda_2^6 = 1$$

2. Setiap pekerja mengerjakan tepat satu kemungkinan solusi dari K_j solusi yang mungkin. Kendala ini dituliskan sebagai berikut:

$$\sum_{k=1}^{k_j}\lambda_j^k = 1,\ \ j = 1,2,\dots,n$$

atau

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 + \lambda_1^4 + \lambda_1^5 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$$
$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \lambda_2^1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^3 + \lambda_2^4 + \lambda_2^5 + \lambda_2^6 = 1$$

Batasan variabel keputusan dari model menyatakan bahwa variabel keputusan model bernilai 0 atau 1. Batasan ini dapat dinotasikan sebagai:

$$\lambda_j^k \in \{0,1\},\ \ k = 1,2,\dots,K_j,\ \ \ j = 1,2,\dots,n$$

Langkah 3: Konversi Model *Multi-objective*.

Pada tahapan ini dilakukan konversi tiga fungsi tujuan di atas menjadi model optimasi dengan fungsi tujuan tunggal berdasarkan Metode *Weighted-sum* dengan cara memberikan bobot pada masing-masing fungsi tujuan. Pada contoh masalah ini akan diambil bobot dengan koefisien satu, karena diantara tiga fungsi tujuan tersebut tidak ada yang lebih diprioritaskan ketiga fungsi tujuan memiliki prioritas yang sama. Sehingga diperoleh *master problem* yang baru sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$z = \sum_{j-1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}(w_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}z_{ij}^k + w_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij}z_{ij}^k - w_3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}z_{ij}^k)\lambda_j^k$$

$$\begin{aligned}= \Big(&(2\lambda_1^1 + 5\lambda_1^2 + 3\lambda_1^3 + 5\lambda_1^4 + 2\lambda_1^5 + 2\lambda_2^1 + 5\lambda_2^2 + 4\lambda_2^3 + 3\lambda_2^4 + 5\lambda_2^5 + 2\lambda_2^6) \\ &+ (8\lambda_1^1 + 19\lambda_1^2 + 11\lambda_1^3 + 20\lambda_1^4 + 9\lambda_1^5 + 9\lambda_2^1 + 18\lambda_2^2 + 19\lambda_2^3 \\ &+ 9\lambda_2^4 + 19\lambda_2^5 + 10\lambda_2^6) \\ &- (5\lambda_1^1 + 13\lambda_1^2 + 8\lambda_1^3 + 14\lambda_1^4 + 6\lambda_1^5 + 5\lambda_2^1 + 13\lambda_2^2 + 11\lambda_2^3 + 8\lambda_2^4 \\ &+ 14\lambda_2^5 + 6\lambda_2^6)\Big)\end{aligned}$$

$$= 5\lambda_1^1 + 11\lambda_1^2 + 6\lambda_1^3 + 11\lambda_1^4 + 5\lambda_1^5 + 6\lambda_2^1 + 10\lambda_2^2 + 12\lambda_2^3 + 4\lambda_2^4 + 10\lambda_2^5 + 6\lambda_2^6$$

Terhadap:

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^2 + 0 + 0 + 0 + \lambda_2^1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^3 + 0 + 0 + 0 = 1$$
$$0 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 + \lambda_1^4 + 0 + 0 + \lambda_2^2 + 0 + \lambda_2^4 + \lambda_2^5 + 0 = 1$$
$$0 + 0 + 0 + \lambda_1^4 + \lambda_1^5 + 0 + 0 + \lambda_2^3 + 0 + \lambda_2^5 + \lambda_2^6 = 1$$
$$\lambda_1^1 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 + \lambda_1^4 + \lambda_1^5 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$$
$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \lambda_2^1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^3 + \lambda_2^4 + \lambda_2^5 + \lambda_2^6 = 1$$
$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, \quad k = 1,2,\dots,K_j, \quad j = 1,2$$

Selengkapnya, *master problem* untuk masalah penugasan *multi-objective* adalah sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$\begin{aligned}z = {}& 5\lambda_1^1 + 11\lambda_1^2 + 6\lambda_1^3 + 11\lambda_1^4 + 5\lambda_1^5 + 6\lambda_2^1 + 10\lambda_2^2 + 12\lambda_2^3 + 4\lambda_2^4 + 10\lambda_2^5 \\ &+ 6\lambda_2^6\end{aligned}$$

Terhadap:

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^2 + 0 + 0 + 0 + \lambda_2^1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^3 + 0 + 0 + 0 = 1$$
$$0 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 + \lambda_1^4 + 0 + 0 + \lambda_2^2 + 0 + \lambda_2^4 + \lambda_2^5 + 0 = 1$$
$$0 + 0 + 0 + \lambda_1^4 + \lambda_1^5 + 0 + 0 + \lambda_2^3 + 0 + \lambda_2^5 + \lambda_2^6 = 1$$

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 + \lambda_1^4 + \lambda_1^5 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$$

$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \lambda_2^1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^3 + \lambda_2^4 + \lambda_2^5 + \lambda_2^6 = 1$$

$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, \ \ k = 1,2, \dots, K_j, \quad j = 1,2$$

Langkah 4: Pembentukan *RMP*.

RMP dibentuk dari sebagian variabel pada *master problem* sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$z = 5\lambda_1^1 + 11\lambda_1^2 + 5\lambda_1^5 + 4\lambda_2^4 + 10\lambda_2^5 + 6\lambda_2^6$$

Terhadap:

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^2 = 1$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^4 + \lambda_2^5 = 1$$

$$\lambda_1^5 + \lambda_2^5 + \lambda_2^6 = 1$$

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^2 + \lambda_1^5 = 1$$

$$\lambda_2^4 + \lambda_2^5 + \lambda_2^6 = 1$$

$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, \ \ k = 1,2, \dots, K_j, \quad j = 1,2$$

Selanjutnya *RMP* di relaksasi dengan mengubah tanda $' =' $ pada fungsi kendala menjadi $' \geq '$ dan diselesaikan dengan Metode Simpleks untuk mendapatkan *shadow price*. Berikut *RMP* setelah direlaksasi:

Meminimumkan:

$$z = 5\lambda_1^1 + 11\lambda_1^2 + 5\lambda_1^5 + 4\lambda_2^4 + 10\lambda_2^5 + 6\lambda_2^6$$

Terhadap:

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^2 \geq 1$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^4 + \lambda_2^5 \geq 1$$

$$\lambda_1^5 + \lambda_2^5 + \lambda_2^6 \geq 1$$

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^2 + \lambda_1^5 \geq 1$$

$$\lambda_2^4 + \lambda_2^5 + \lambda_2^6 \geq 1$$

$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, \ \ k = 1,2, \dots, K_j, \quad j = 1,2$$

Setelah direlaksasi, *RMP* diselesaikan menggunakan Metode Simpleks, dan diperoleh solusi optimal untuk *RMP* tersebut adalah 14, dengan $\lambda_1^1 = 1, \lambda_1^5 = 1$, dan $\lambda_2^4 = 1$, dan *shadow price* $u_i = (-5, -4, -5)$ dan $v_j = (0,0)$.

Setelah diperoleh nilai optimal dan *shadow price*, cek apakah variabel keputusannya bernilai *integer* atau *non integer*. Jika variabel keputusan bernilai *integer*, maka dilanjutkan ke tahap selanjutnya.

Langkah 5: Pembentukan *Subproblem*.

Subproblem untuk setiap pekerja *j* dinyatakan sebagai *KP*$_j$. *Subproblem* untuk setiap pekerja digunakan untuk meminimumkan *reduced cost* dengan kendala setiap tugas dikerjakan oleh tepat satu pekerja dan total waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan seluruh tugas. Kolom hasil penyelesaian *subproblem* selanjutnya akan ditambahkan di *RMP* untuk diselesaikan kembali. Langkah tersebut akan diulang sampai tidak ada *reduce cost* yang bernilai negatif.

Pada contoh sebelumnya, diperoleh solusi optimal untuk *RMP* adalah 14, dengan $\lambda_1^1 = 1, \lambda_1^5 = 1$, dan $\lambda_2^4 = 1$, dan *shadow price* $u_i = (-5, -4, -5)$ dan $v_j = (0,0)$. Tahap selanjutnya, akan diuji optimalitas apakah solusi optimal pada *RMP* tersebut juga solusi optimal pada *master problem* atau belum dengan cara menyelesaikan *subproblem*. Sehingga *subproblem* untuk setiap pekerja adalah sebagai berikut:

***Subproblem* pekerja 1:** (KP_1)

Meminimumkan:

$$z = (c_{11} - u_1)x_{11} + (c_{21} - u_2)x_{21} + (c_{31} - u_3)x_{31} - v_1$$
$$= 10x_{11} + 10x_{21} + 10x_{31} - 0$$

Dengan Kendala:

$$7x_{11} + 4x_{21} + 5x_{31} \leq 13$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Solusi optimal untuk *subproblem* pekerja 1 diperoleh nilai z = 0, dengan variabel keputusannya $x_{11} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{31} = 0$.

***Subproblem* pekerja 2:** (KP_2)

Meminimumkan:

$$z = (c_{12} - u_1)x_{12} + (c_{22} - u_2)x_{22} + (c_{32} - u_3)x_{32} - v_2$$
$$= 11x_{12} + 8x_{22} + 11x_{32} - 0$$

Dengan Kendala:

$$4x_{12} + 6x_{22} + 4x_{32} \leq 11$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Solusi optimal untuk *subproblem* pekerja 1 diperoleh nilai z = 0, dengan variabel keputusannya $x_{12} = 0, x_{22} = 0, x_{32} = 0$. Karena didapat *subproblem* untuk kedua pekerja bernilai ≥ 0, maka solusi optimal pada *RMP* juga merupakan solusi untuk *master problem.* Sehingga solusi optimal untuk masalah penugasan tersebut adalah 14, dengan ketentuan penugasan $z_1^1 = (1,0,0), z_1^5 = (0,0,1)$, dan $z_2^4 = (0,1,0)$ artinya pekerja 1 mengerjakan tugas 1 dan 3, dan pekerja 2 melakukan tugas 2.