BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan suatu ilmu yang memiliki banyak teori dan berperan penting dalam memberikan alternatif penyelesaian berbagai masalah. Salah satu teori matematika yang memiliki peran penting dalam penyelesaian masalah yaitu teori graf. Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Euler (Buhaerah et al., 2022). Tulisan tersebut berisikan upaya memecahkan permasalahan jembatan *Konigsberg* yang sangat terkenal di Eropa (Buhaerah et al., 2022). Setelah tulisan Euler dibuat, sekitar seratus tahun lamanya tidak ada perkembangan mengenai teori graf yang berarti (Rahayuningsih, 2018). Hingga pada tahun 1847, G. R. Kirchoff (1824-1887) berhasil mengembangkan teori pohon (*Theory of Trees*) (Rahayuningsih, 2018). Teori pohon tersebut digunakan untuk memecahkan permasalahan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, A. Coyley (1821-1895) juga menggunakan konsep teori pohon untuk menjelaskan persoalan kimia hidrokarbon (Buhaerah et al., 2022). Pada masa Kirchoff dan Coyley juga telah lahir teori yang berkenaan dengan konjektur empat warna, yang menyatakan bahwa untuk mewarnai sebuah atlas cukup dengan menggunakan empat warna sedemikian hingga setiap negara yang berbatasan akan memiliki warna yang berbeda (Rahayuningsih, 2018). Para ahli teori graf memiliki keyakinan bahwa orang yang pertama kali mengemukakan masalah empat warna adalah A. F. Mobius (1790-1868) dalam salah satu kuliahnya pada Tahun 1840 (Buhaerah et al., 2022). Sepuluh tahun kemudian masalah ini kembali dibahas oleh A. De Morgan (1806-1871) bersama ahli-ahli matematika lainnya di Kota London (Buhaerah et al., 2022). Dengan demikian, tulisan De Morgan dianggap sebagai referensi pertama berkenaan dengan masalah empat warna. Masalah empat warna ini menjadi sangat terkenal setelah Coyley melakukan publikasi pada Tahun 1879 dalam *Proceedings of the Royal Geographic Society* volume pertama (Rahayuningsih, 2018).

Suatu graf G didefinisikan sebagai himpunan (V, E) atau dapat ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, di mana $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ merupakan himpunan tak kosong simpul (*vertex*) pada graf G dan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang simpul (v_i, v_j) pada graf G (Umilasari, 2015). Terdapat berbagai klasifikasi jenis graf yang berkembang hingga saat ini. Berdasarkan ada tidaknya *loop* atau sisi ganda, graf dibagi menjadi graf sederhana dan tidak sederhana. Berdasarkan orientasi arah, graf dibagi menjadi graf berarah dan tidak berarah. Berdasarkan jumlah simpul, graf dibagi menjadi graf berhingga dan tidak berhingga. Terdapat pula graf-graf khusus seperti graf lengkap, graf lingkaran atau graf siklik, graf teratur, dan graf bipartit. Graf lengkap dinotasikan K_n adalah graf sederhana dengan n simpul, di mana setiap simpul saling bertetangga (*ajacent*) (Liandari, 2021). Graf bipartit adalah graf sederhana yang himpunan simpulnya dapat dipartisi menjadi dua himpunan V_1 dan V_2 sedemikian hingga setiap sisi pada graf G *incident* dengan sebuah simpul di V_1 dan sebuah simpul di V_2 (Asratian et al., 1998). Graf bipartit lengkap dinotasikan $K_{l,m}$ adalah graf bipartit yang di mana setiap simpul di V_1 bertetangga dengan setiap simpul di V_2 dengan $|V_1| = l$ dan $|V_2| = m$ (Goodaire & Parmenter, 2002). Lebih lanjut, graf bipartit lengkap $K_{1,m}$ disebut graf bintang dengan pusat di V_1 (Umilasari, 2015).

Operasi antara dua buah graf dapat menghasilkan suatu graf baru. Operasi pada graf tersebut diantaranya operasi kartesian ($\times$), *join* (+), gabungan ($\cup$), *comb* ($\rhd$), dan operasi korona ($\odot$) (Umilasari, 2015). Operasi korona dari graf G dan H didefinisikan sebagai suatu graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah graf G dan $|V(G)|$ duplikat dari graf H yaitu H_i dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, |V(G)|$, kemudian menghubungkan setiap simpul ke $-\ i$ dari G ke setiap simpul di H_i (Harary & Frucht, 1970).

Topik dalam teori graf yang menarik untuk dikaji diantaranya yaitu konsep pewarnaan simpul (*vertex coloring*) dan juga bilangan kromatik simpul. Pewarnaan simpul erat kaitannya dengan persoalan pewarnaan pada peta, yaitu menentukan banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai peta sehingga dua daerah yang bertetangga memiliki warna yang berbeda (Rahayuningsih, 2018). Bilangan kromatik simpul dari graf G dinyatakan dengan $\chi(G)$ adalah bilangan k terkecil sehingga simpul pada graf G dapat diwarnai dengan k warna (Rahayuningsih, 2018). Bahasan mengenai pewarnaan pada graf tidak hanya difokuskan pada beberapa jenis graf khusus yang berkembang hingga saat ini, tetapi juga dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan permasalahan yang dapat ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contohnya yaitu untuk menentukan jadwal perkuliahan sedemikian sehingga tidak terjadi tumpang tindih antara mata kuliah, dosen, ruangan dan waktu. Selain itu, bilangan kromatik simpul pada graf dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan penugasan, penyimpanan bahan kimia, dan pengaturan arus lalu lintas.

Penelitian tentang bilangan kromatik hasil operasi korona dua buah graf telah dilakukan oleh beberapa peneliti, antara lain yaitu penelitian yang dilakukan oleh Simanjuntak dan Mulyono (2021) yang meneliti tentang pola bilangan kromatik simpul dari graf hasil operasi korona graf lingkaran dan graf kubik, yaitu $\chi(C_n \odot Q_m)$ dan $\chi(Q_m \odot C_n)$. Mohan, dkk. (2017) melakukan penelitian untuk menentukan pewarnaan total dari graf hasil operasi korona graf G dan graf H, di mana graf G merupakan *total colorable graph* dan graf H merupakan graf siklik, graf lengkap, ataupun graf bipartit.

Salah satu topik mengenai bilangan kromatik simpul hasil operasi korona dua buah graf yang belum dikaji adalah bilangan kromatik simpul hasil operasi korona dari graf lengkap dan graf bintang. Sehingga dalam penelitian kali ini akan ditentukan bilangan kromatik simpul hasil operasi korona dari graf lengkap dan graf bintang, yaitu $\chi(K_n \odot K_{1,m})$ dan $\chi(K_{1,m} \odot K_n)$. Memanfaatkan perkembangan teknologi untuk mempermudah visualisasi pewarnaan simpul pada graf hasil operasi korona $K_n \odot K_{1,m}$ dan $K_{1,m} \odot K_n$, maka pada penelitian ini juga akan dikonstruksi program untuk visualisasi pewarnaan simpul menggunakan *software* Matlab R2022a.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, masalah yang akan dibahas pada penelitian ini adalah:

1. Berapakah bilangan kromatik simpul hasil operasi korona dari graf lengkap K_n dan graf bintang $K_{1,m}$ $(K_n \odot K_{1,m})$?
2. Berapakah bilangan kromatik simpul hasil operasi korona dari graf bintang $K_{1,m}$ dan graf lengkap K_n $(K_{1,m} \odot K_n)$?
3. Bagaimana konstruksi program untuk visualisasi pewarnaan simpul graf $K_n \odot K_{1,m}$ dan $K_{1,m} \odot K_n$?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini memiliki tujuan untuk:

1. Menyusun proposisi mengenai bilangan kromatik simpul hasil operasi korona dari graf lengkap K_n dan graf bintang $K_{1,m}$ $\left(K_n \odot K_{1,m}\right)$.
2. Menyusun proposisi mengenai bilangan kromatik simpul hasil operasi korona dari graf bintang $K_{1,m}$ dan graf lengkap K_n $\left(K_{1,m} \odot K_n\right)$.
3. Mengonstruksi program untuk visualisasi pewarnaan simpul graf $K_n \odot K_{1,m}$ dan $K_{1,m} \odot K_n$.

1.4 Manfaat Penelitian

Dilakukannya penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Menambah pengetahuan dalam bidang teori graf.
2. Memberikan kontribusi terhadap perkembangan pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup bilangan kromatik simpul hasil operasi korona pada dua buah graf.
3. Memberikan motivasi kepada pembaca untuk melakukan pengembangan konsep penelitian tentang bilangan kromatik simpul hasil operasi korona pada dua buah graf khusus lainnya.

1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini terdiri atas lima bab. BAB I PENDAHULUAN terdiri atas: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penelitian. BAB II KAJIAN TEORI terdiri atas: terminologi dasar graf, jenis-jenis graf, operasi korona pada graf, pewarnaan simpul dan bilangan kromatik simpul pada graf. BAB III METODOLOGI PENELITIAN terdiri dari uraian langkah-langkah penelitian. BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN terdiri atas: graf hasil operasi korona $K_n \odot K_{1,m}$ dan $K_{1,m} \odot K_n$, struktur graf $K_n \odot K_{1,m}$ dan $K_{1,m} \odot K_n$, pola bilangan kromatik simpul graf $K_n \odot K_{1,m}$ dan $K_{1,m} \odot K_n$, perumusan hipotesis bilangan kromatik simpul graf $K_n \odot K_{1,m}$ dan $K_{1,m} \odot K_n$, pembuktian bilangan kromatik simpul graf $K_n \odot K_{1,m}$ dan $K_{1,m} \odot K_n$, dan kronstruksi program visualisasi pewarnaan simpul graf $K_n \odot K_{1,m}$ dan $K_{1,m} \odot K_n$ menggunakan Matlab. BAB V PENUTUP terdiri dari kesimpulan dan saran.