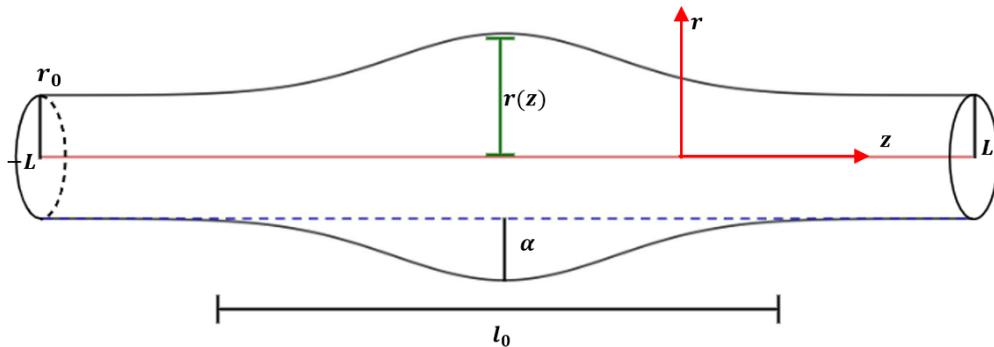


## BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Dalam BAB III dijelaskan langkah-langkah yang dilakukan dalam mengerjakan penelitian ini, mulai dari pencarian model dasar, pencarian solusi, validasi solusi hingga melakukan simulasi model dan mencari faktor-faktor yang mempengaruhi kecepatan aliran darah terhadap kondisi pelebaran tersebut. Berikut penjelasan lebih lanjut mengenai langkah-langkah pengerjaan dalam penelitian ini.

### 3.1 Identifikasi Masalah

Darah mengalir di dalam tubuh melalui pembuluh darah dengan adanya kecepatan aliran darah. Dalam penelitian ini, darah diasumsikan sebagai fluida yang bersifat Newtonian dan *incompressible*. Adapun, kondisi pembuluh darah pada kasus ini adalah simetris terhadap sumbu  $z$  dan terjadi pelebaran pada diameter pembuluh darah. Dengan notasi  $r(z)$  menyatakan ukuran jari-jari pembuluh darah,  $r_0$  merupakan jari-jari pembuluh darah pada keadaan normal (tidak terjadi pelebaran ataupun penyempitan),  $\alpha$  adalah ketinggian maksimum dari perubahan jari-jari pada pembuluh darah,  $(-L, L)$  yaitu panjang pembuluh darah, sedangkan  $l_0$  merupakan panjang dari bagian pembuluh darah yang mengalami perubahan diameter. Sehingga kondisi pembuluh darah tersebut dapat diilustrasikan seperti pada gambar 3.1.



Gambar 3.1 Pembuluh Darah dengan Pelebaran Diameter

### 3.2 Membangun Model Dasar

Untuk mengonstruksi model dasar kecepatan aliran darah yang dinotasikan dengan  $V(r, z, \theta)$  pada penelitian ini, digunakan persamaan Navier-Stokes dengan koordinat polar silinder. Berdasarkan asumsi bahwa pembuluh darah yang diteliti bersifat simetris terhadap sumbu  $z$ , maka parameter  $\theta$  dapat diabaikan. Sehingga

kecepatan aliran darah yang diamati hanya berada pada arah radial ( $v_r$ ) dan arah aksial ( $v_z$ ). Jadi persamaan Navier-Stokes yang digunakan adalah persamaan (2.40 a) dan (2.40 c). Diasumsikan juga bahwa kondisi aliran darah berada pada keadaan setimbang (*steady*), sehingga tidak ada pengaruh perubahan kecepatan terhadap perubahan waktu atau dapat dinyatakan

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

Asumsi lainnya yaitu darah merupakan fluida yang bersifat tak termampatkan (*incompressible*), sehingga persamaan kontinuitasnya adalah sebagai berikut

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

Selain itu, darah yang mengalir dalam pembuluh darah diasumsikan tidak dipengaruhi oleh gaya gravitasi, sehingga nilai  $\rho g_r$  dan  $\rho g_z$  dapat diabaikan. Pada penelitian ini diameter pembuluh darah mengalami perubahan (pelebaran ataupun penyempitan), akibatnya nilai jari-jari dari pembuluh darah mengalami perubahan. Jadi, berdasarkan asumsi-asumsi yang sudah diuraikan sebelumnya, maka model dasar pembuluh darah yang digunakan pada penelitian ini adalah

$$\rho \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (3.3 a)$$

$$\rho \left( v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (3.3 b)$$

dengan jari-jari pembuluh darah yang mengalami perubahan dinyatakan dengan

$$r(z) = \begin{cases} r_0 + \alpha \cdot e^{-\frac{3z^2}{l_0^2}}, & -l_0 < z < l_0 \\ r_0, & z \text{ lainnya} \end{cases}$$

dan kondisi batas yang berlaku adalah sebagai berikut

$$v_r = v_z = 0, \text{ ketika } r = r(z) \quad (3.4 a)$$

$$v_z = C_m, \text{ ketika } r = 0 \quad (3.4 b)$$

$$Q = \int_0^{r(z)} rv_z dr = \frac{1}{2} r_0^2 v_{r_0} \quad (3.4 c)$$

di mana  $C_m$  merupakan nilai maksimum untuk kecepatan aksial, notasi  $Q$  merupakan laju volume aliran darah, serta nilai  $v_{r_0}$  adalah nilai rata-rata kecepatan aliran darah.

Selanjutnya model dasar dan kondisi batas yang sudah diperoleh sebelumnya akan ditransformasi ke dalam bentuk variabel tak berdimensi, untuk keperluan penskalaan. Misalkan  $\tilde{v}_r, \tilde{v}_z, \tilde{r}, \tilde{z}$ , dan  $\tilde{p}$  berturut-turut adalah notasi variabel tak berdimensi untuk kecepatan dalam arah radial, kecepatan dalam arah aksial, jari-jari pembuluh darah, panjang pembuluh darah serta tekanan. Adapun berdasarkan Mirza, dkk. (2013), variabel-variabel tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\tilde{v}_r = \frac{v_r}{v_{r_0}}, \tilde{v}_z = \frac{v_z}{v_{r_0}}, \tilde{r} = \frac{r}{r_0}, \tilde{z} = \frac{z}{L}, \tilde{p} = \frac{r_0^2}{\mu v_{r_0} L} p \quad (3.5)$$

atau juga dituliskan sebagai

$$v_r = \tilde{v}_r v_{r_0}, v_z = \tilde{v}_z v_{r_0}, r = \tilde{r} r_0, z = \tilde{z} L, p = \tilde{p} \frac{\mu v_{r_0} L}{r_0^2} \quad (3.6)$$

Langkah selanjutnya untuk mengubah persamaan kontinuitas dan model dasar dari bentuk variabel berdimensi ke bentuk variabel tak berdimensi adalah dengan mensubstitusi persamaan (3.6) ke dalam persamaan (3.2) hingga persamaan (3.4) sebagai berikut. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.6) pada persamaan kontinuitas (3.2), diperoleh

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{\partial \tilde{v}_r v_{r_0}}{\partial \tilde{r} r_0} + \frac{\tilde{v}_r v_{r_0}}{\tilde{r} r_0} + \frac{\partial \tilde{v}_z v_{r_0}}{\partial \tilde{z} L} = 0 \\ \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{v_{r_0}}{r_0} \left( \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}_r}{\tilde{r}} + \frac{r_0}{L} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}_r}{\tilde{r}} + \frac{r_0}{L} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} = 0 \\ \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial (\tilde{r} \tilde{v}_r)}{\partial \tilde{r}} + \delta \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Persamaan (3.7) merupakan persamaan kontinuitas dalam bentuk tak berdimensi, di mana  $\delta = \frac{r_0}{L}$  dan diasumsikan bahwa  $r_0 \ll L$  sehingga  $\delta \sim o(\varepsilon)$ . Kemudian model dasar untuk arah radial (3.3 a) juga akan ditransformasikan ke bentuk variabel tak berdimensi. Dengan cara yang serupa yaitu mensubstitusikan persamaan (3.6) ke dalam persamaan (3.3 a) sehingga

$$\begin{aligned}
\rho \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \\
\Leftrightarrow \rho \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \\
\Leftrightarrow \rho \left( \tilde{v}_r v_{r_0} \frac{\partial \tilde{v}_r v_{r_0}}{\partial \tilde{r} r_0} + \tilde{v}_z v_{r_0} \frac{\partial \tilde{v}_r v_{r_0}}{\partial \tilde{z} L} \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \tilde{r} r_0} \left( \tilde{p} \frac{\mu v_{r_0} L}{r_0^2} \right) \\
&\quad + \mu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_r v_{r_0}}{(\tilde{r} r_0)^2} + \frac{1}{\tilde{r} r_0} \frac{\partial \tilde{v}_r v_{r_0}}{\partial \tilde{r} r_0} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r v_{r_0}}{\partial (\tilde{z} L)^2} - \frac{\tilde{v}_r v_{r_0}}{(\tilde{r} r_0)^2} \right) \\
\Leftrightarrow \frac{\rho v_{r_0}^2}{r_0} \left( \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{r_0}{L} \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{z}} \right) \\
&= \frac{\mu v_{r_0}}{r_0^2} \left[ -\frac{L}{r_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{r_0^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\tilde{v}_r}{\tilde{r}^2} \right) \right] \\
\Leftrightarrow \frac{\rho v_{r_0} r_0}{\mu} \left( \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{r_0}{L} \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{z}} \right) &= -\frac{L}{r_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{r_0^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\tilde{v}_r}{\tilde{r}^2} \\
\Leftrightarrow R_e \left( \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \delta \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{z}} \right) &= -\frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\tilde{v}_r}{\tilde{r}^2} \\
\Leftrightarrow R_e \left( \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \delta \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{z}} \right) &= -\frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\tilde{v}_r}{\tilde{r}^2} \\
\Leftrightarrow \delta R_e \left( \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \delta \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{z}} \right) \\
&= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \delta \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} \right) + \delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\tilde{v}_r}{\tilde{r}^2} \right) \tag{3.8 a}
\end{aligned}$$

Persamaan (3.8 a) menyatakan model dasar untuk arah radial dalam bentuk tak berdimensi. Langkah selanjutnya yaitu dengan mensubstitusikan persamaan (3.6) ke persamaan (3.3 b) agar mendapatkan model dasar untuk arah aksial dalam bentuk variabel tak berdimensi, akibatnya diperoleh

$$\begin{aligned}
\rho \left( v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \\
\Leftrightarrow \rho \left( v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \rho \left( \tilde{v}_r v_{r_0} \frac{\partial \tilde{v}_z v_{r_0}}{\partial \tilde{r} r_0} + \tilde{v}_z v_{r_0} \frac{\partial \tilde{v}_z v_{r_0}}{\partial \tilde{z} L} \right) \\
&\quad = -\frac{\partial}{\partial \tilde{z} L} \left( \tilde{p} \frac{\mu v_{r_0} L}{r_0^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z v_{r_0}}{\partial (\tilde{r} r_0)^2} + \frac{1}{\tilde{r} r_0} \frac{\partial \tilde{v}_z v_{r_0}}{\partial \tilde{r} r_0} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z v_{r_0}}{\partial (\tilde{z} L)^2} \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\rho v_{r_0}^2}{r_0} \left( \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} + \frac{r_0}{L} \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right) = \frac{\mu v_{r_0}}{r_0^2} \left[ -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} + \frac{r_0^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}^2} \right) \right] \\
&\Leftrightarrow \frac{\rho v_{r_0} r_0}{\mu} \left( \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} + \frac{r_0}{L} \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right) = \left[ -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{r_0^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}^2} \right) \right] \\
&\Leftrightarrow R_e \left( \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} + \delta \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} \right) + \delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}^2} \quad (3.8 b)
\end{aligned}$$

Persamaan (3.8 b) tersebut adalah model dasar untuk arah aksial dalam bentuk variabel tak berdimensi, dengan  $R_e = \frac{\rho v_{r_0} r_0}{\mu}$  serta bentuk tak berdimensi untuk perubahan jari-jari pembuluh darah dinyatakan dengan

$$f(\tilde{z}) = \begin{cases} 1 + \varepsilon e^{-\frac{3\tilde{z}^2}{\beta^2}}, & -\beta < \tilde{z} < \beta \\ 1, & \tilde{z} \text{ lainnya} \end{cases}$$

di mana  $f(\tilde{z}) = \frac{r(\tilde{z})}{r_0}$ ,  $\beta = \frac{l_0}{L}$  dan  $\varepsilon = \frac{\alpha}{r_0}$ . Adapun kondisi batas dalam bentuk tak berdimensi dituliskan pada persamaan (3.9 a) hingga (3.9 c) berikut

$$\tilde{v}_r = \tilde{v}_z = 0, \text{ ketika } \tilde{r} = f(\tilde{z}) \quad (3.9 a)$$

$$\tilde{v}_z = C_{max}, \text{ ketika } \tilde{r} = 0 \quad (3.9 b)$$

$$\tilde{Q} = \int_0^{f(\tilde{z})} \tilde{r} \tilde{v}_z d\tilde{r} = \frac{1}{2} \quad (3.9 c)$$

### 3.3 Mencari Solusi untuk Model

Langkah awal yang perlu dilakukan dalam pencarian solusi model dasar adalah mengubah model dasar ke dalam bentuk fungsi arus (*stream function*). Hal ini bertujuan untuk memudahkan pencarian solusi, yaitu dengan menyederhanakan bentuk variabel  $\tilde{v}_r$ ,  $\tilde{v}_z$ , dan  $\tilde{p}$ . Adapun hubungan variabel kecepatan  $\tilde{v}_r$  dan  $\tilde{v}_z$  dengan fungsi arus dinyatakan sebagai

$$\tilde{v}_r = \frac{\delta}{\tilde{r}} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{z}}, \quad \tilde{v}_z = -\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{r}} \quad (3.10)$$

Berdasarkan lampiran 1, terbukti bahwa persamaan (3.10) memenuhi persamaan kontinuitas untuk fluida tak termampatkan (*incompressible*). Setelah memperoleh

hubungan tersebut, eliminasi variabel  $\tilde{p}$  dengan mendiferensialkan persamaan (3.8 a) terhadap variabel  $\tilde{z}$  dan mendiferensialkan persamaan (3.8 b) terhadap variabel  $\tilde{r}$ . Kemudian, untuk memperoleh model dasar dalam bentuk fungsi arus, substitusikan persamaan (3.10) ke dalam persamaan model yang sudah tidak memuat variabel  $\tilde{p}$ .

Ketika persamaan model dasar dalam fungsi arus telah diperoleh, selanjutnya akan diterapkan metode perturbasi untuk mencari nilai  $\psi$  dengan  $\delta$  sebagai parameter kecil. Langkah awal yang perlu dilakukan adalah mengekspansi nilai  $\psi$  ke dalam deret pangkat, sehingga diperoleh

$$\psi = \psi_0 + \delta\psi_1 + \delta^2\psi_2 + \dots \quad (3.11)$$

Persamaan (3.11) akan disubstitusi ke model dalam bentuk fungsi arus, sehingga dari persamaan yang baru dapat ditentukan solusi dari masalah pada setiap orde di  $\delta$ . Jika setiap solusi pada setiap orde sudah didapatkan, kemudian akan diketahui solusi hampiran  $\psi$ .

### 3.4 Memvalidasi Solusi dari Model

Apabila solusi sudah diperoleh, langkah selanjutnya adalah melakukan validasi untuk mengetahui kebenaran dari solusi tersebut. Dalam melakukan validasi, substitusikan solusi yang sudah diperoleh ke dalam persamaan model dasar dan syarat batasnya. Jika solusi memenuhi persamaan tersebut maka solusi adalah benar.

### 3.5 Simulasi Model

Setelah melakukan validasi, selanjutnya akan dilakukan simulasi terhadap model. Kemudian diasumsikan nilai parameter yang diperlukan, selanjutnya dengan menggunakan *Maple 2021*, solusi akan diinterpretasikan ke dalam grafik. Pembuatan grafik ini bertujuan untuk mempermudah dalam menganalisis faktor yang mempengaruhi kecepatan pembuluh darah.

### 3.6 Menarik Kesimpulan

Pada bagian kesimpulan akan dituliskan model dasar dari kecepatan aliran darah pada pembuluh darah yang berubah diameter dan juga solusi dari model tersebut. Serta akan ditentukan faktor-faktor yang mempengaruhi kecepatan aliran darah berdasarkan hasil interpretasi solusi yang sudah diperoleh.