

**PEMODELAN KECEPATAN ALIRAN DARAH PADA PEMBULUH
DARAH YANG BERUBAH DIAMETER**

SKRIPSI

Diajukan untuk memenuhi sebagian syarat dalam memperoleh gelar Sarjana
Matematika



Oleh

Rizkia Putri Syafina

NIM 1904874

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA**

2023

PEMODELAN KECEPATAN ALIRAN DARAH PADA PEMBULUH DARAH YANG BERUBAH DIAMETER

Oleh:

Rizkia Putri Syafina

NIM 1904874

Sebuah Skripsi yang Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika pada
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

© Rizkia Putri Syafina 2023
Universitas Pendidikan Indonesia
Agustus 2023

Hak cipta dilindungi Undang-Undang

Skripsi ini tidak boleh diperbanyak seluruhnya atau sebagian, dengan dicetak ulang, fotokopi, atau cara lainnya tanpa izin dari penulis

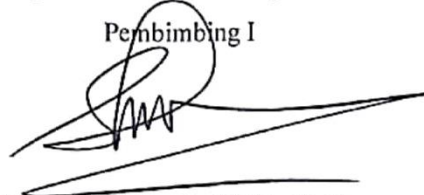
LEMBAR PENGESAHAN

Rizkia Putri Syafina

PEMODELAN KECEPATAN ALIRAN DARAH PADA PEMBULUH DARAH YANG BERUBAH DIAMETER

Disetujui dan disahkan oleh pembimbing

Pembimbing I



Dra. Siti Fatimah, M.Si., Ph.D.

NIP. 196808231994032002

Pembimbing II



Dr. Kartika Yulianti, S.Pd., M.Si.

NIP. 198207282005012001

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Kartika Yulianti, S.Pd., M.Si.

NIP. 198207282005012001

PEMODELAN KECEPATAN ALIRAN DARAH PADA PEMBULUH DARAH YANG BERUBAH DIAMETER

ABSTRAK

Kecepatan aliran darah merupakan salah satu fenomena yang dapat direpresentasikan dalam bentuk model matematika. Karakteristik pembuluh darah yang mudah meregang menyebabkan diameter pembuluh darah mengalami pelebaran ataupun penyempitan. Dari sisi patologi, perubahan diameter dapat disebabkan oleh kelainan/penyakit tertentu. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana pengaruh perubahan diameter terhadap kecepatan aliran darah. Dengan menggunakan persamaan Navier-Stokes 2D pada arah radial dan aksial diperoleh persamaan model untuk kasus tersebut. Selain itu, fungsi arus digunakan untuk mempermudah pencarian solusi. Selanjutnya persamaan diselesaikan dengan menggunakan metode perturbasi dalam aspek amplitudo perubahan diameter. Interpretasi solusi dalam bentuk grafik juga disajikan dengan bantuan *software* Maple 2021. Dari hasil penelitian disimpulkan bahwa perubahan diameter mempengaruhi kecepatan aliran darah. Saat mengalami pelebaran, kecepatan aliran darah akan melambat. Sedangkan, ketika terjadi penyempitan kecepatan aliran darah akan meningkat.

Kata Kunci: Kecepatan Aliran Darah, Persamaan Navier-Stokes, Perubahan Diameter, Metode Perturbasi, Fungsi Arus.

BLOOD FLOW VELOCITY MODELING IN DIAMETER-CHANGING BLOOD VESSELS

ABSTRACT

Blood flow velocity is one of the phenomena that can be represented in the form of a mathematical model. The characteristic of blood vessels that stretch easily causes the diameter of the blood vessels to widen or narrow. In terms of pathology, diameter-changing can be caused by certain disorders or diseases. This study aims to determine the effect of changes in diameter on the velocity of blood flow. By using the 2D Navier-Stokes equations in the radial and axial directions, the model equations for this case are obtained. In addition, the flow function is used to simplify the search for solutions. Furthermore, the equation is solved using the perturbation method in terms of the amplitude change in diameter. Interpretation of solutions in graphical form is also presented with the help of the Maple 2021 software. From the results of the study, it was concluded that changes in diameter affect the speed of blood flow. When experiencing dilation, the speed of blood flow will slow down. Meanwhile, when there is a narrowing, the speed of blood flow will increase.

Key Word: *Blood Flow Velocity, Navier-Stokes Equation, Diameter-Changing, Perturbation Method, Streamline Function.*

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
HALAMAN PERNYATAAN.....	ii
KATA PENGANTAR.....	iii
UCAPAN TERIMA KASIH	iv
ABSTRAK	vi
<i>ABSTRACT</i>	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR GAMBAR.....	x
DAFTAR LAMPIRAN.....	xii
DAFTAR LAMBANG	xiii
BAB I.....	1
PENDAHULUAN	1
1.1 Latar belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	3
1.4 Batasan Penelitian.....	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	4
1.6 Struktur Organisasi Skripsi.....	4
BAB II.....	6
LANDASAN TEORI	6
2.1 Sistem Sirkulasi Darah	6
2.2 Fluida	7
2.3 Orde.....	8
2.4 Turunan	9
2.5 Persamaan Diferensial Parsial.....	11
2.6 Koordinat Polar	12
2.7 Koordinat Polar Silinder	12
2.8 Vektor Kecepatan Pada Koordinat Polar Silinder	13
2.9 Medan Vektor Kecepatan	13
2.10 Persamaan Kontinuitas	14

2.11	Persamaan Navier-Stokes.....	18
2.12	Metode Perturbasi	23
BAB III	28
METODOLOGI PENELITIAN	28
3.1	Identifikasi Masalah	28
3.2	Membangun Model Dasar	28
3.3	Mencari Solusi untuk Model.....	32
3.4	Memvalidasi Solusi dari Model	33
3.5	Simulasi Model	33
3.6	Menarik Kesimpulan	33
BAB IV	34
HASIL DAN PEMBAHASAN	34
4.1	Pencarian Solusi untuk Model Dasar	34
4.2	Validasi Solusi Dari Model Dasar.....	43
4.3	Simulasi Model	46
BAB V	63
KESIMPULAN DAN SARAN	63
5.1	Kesimpulan.....	63
5.2	Saran	64
DAFTAR PUSTAKA	65
LAMPIRAN	67

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Grafik Tegangan Geser Terhadap Laju Regangan Geser untuk Fluida Newtonian dan Fluida Non-Newtonian	8
Gambar 2.2 Koordinat Bidang Kartesius	12
Gambar 2.3 Vektor Satuan pada Titik $P(r, \theta, z)$	13
Gambar 2.4 Elemen Kubus Kecil dan Diam	15
Gambar 2.5 Penyebaran Aliran Massa pada Elemen Fluida.....	16
Gambar 3.1 Pembuluh Darah dengan Pelebaran Diameter.....	28
Gambar 4.1 Grafik Perubahan r terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = -0.3, \varepsilon = -0.1, \varepsilon = 0, \varepsilon = 0.1$ dan $\varepsilon = 0.3$	48
Gambar 4.2 Grafik ψ terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = 0, r = 0$, dan $r = f(z)$	49
Gambar 4.3 Grafik 3D vr terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = 0$ dan $r \in [0,1]$	50
Gambar 4.4 Grafik 3D vz terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = 0$ dan $r \in [0,1]$	50
Gambar 4.5 Grafik vz terhadap $r \in [0,1]$ untuk $\varepsilon = 0, z = 0, z = 0.25$, dan $z = 0.5$	51
Gambar 4.6 Grafik ψ terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = 0.3$ dan $r \in [0,1]$	52
Gambar 4.7 Grafik ψ terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = 0.3, r = 0$ dan $r = f(z)$	52
Gambar 4.8 Grafik 3D vr terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = 0.3$ dan $r \in [0,1]$	53
Gambar 4.9 Grafik vr terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = 0.3, r = 0$ dan $r = f(z)$.53	53
Gambar 4.10 Grafik vr terhadap $r \in [0,1]$ untuk $\varepsilon = 0.3, z = -0.25, z = 0, z = 0.25$	54
Gambar 4.11 Grafik 3D vz terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = 0.3$ dan $r \in [0,1]$	55
Gambar 4.12 Grafik vz terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = 0.3, r = 0$ dan $r = f(z)$	55
Gambar 4.13 Grafik vz terhadap $r \in [0,1.2)$ untuk $\varepsilon = 0.3$ dan $z = -0.25, z = 0, z = 0.25$	56
Gambar 4.14 Grafik ψ terhadap $r \in [0,0.6]$ untuk $\varepsilon = -0.3$ dan $z \in [-0.4,0.4]$ 57	57
Gambar 4.15 Grafik ψ terhadap $z = 0$ untuk $\varepsilon = -0.3, r = 0$, dan $r = f(z)$	57
Gambar 4.16 Grafik 3D vr terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = -0.3$ dan $r \in [0,0.6]$	58
Gambar 4.17 Grafik vr terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = 0.3, r = 0$, dan $r = f(z)$	59

Gambar 4.18 Grafik vr terhadap $r \in [0,1]$ untuk $\varepsilon = 0.3, z = -0.25, z = 0,$ dan $r = 0.25$	59
Gambar 4.19 Grafik 3D vz terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = -0.3$ dan $r \in [0,0.6]$	60
Gambar 4.20 Grafik vz terhadap $z \in [-1,1]$ untuk $\varepsilon = -0.3, r = 0,$ dan $r = f(z)$	60
Gambar 4.21 Grafik vz terhadap $r \in [0,0.9]$ untuk $\varepsilon = -0.3, z = -0.25, z = 0,$ dan $r = 0.25$	61

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Bukti hubungan fungsi arus dengan kecepatan aliran memenuhi persamaan kontinuitas	67
Lampiran 2 Proses eliminasi variabel p	67
Lampiran 3 Pencarian konstanta dari solusi orde 0 (δ^0)	69
Lampiran 4 Proses penyederhanaan persamaan model dasar untuk (δ^1).....	70
Lampiran 5 Pencarian konstanta dari solusi orde satu (δ^1).....	71

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Satuan
x	Nilai sumbu horizontal pada koordinat kartesius	cm
y	Nilai sumbu vertikal pada koordinat kartesius	cm
z	Nilai sumbu pada koordinat kartesius atau koordinat polar silinder	cm
r	Nilai radius pada koordinat polar/polar silinder	cm
θ	Nilai sudut tangensial pada koordinat polar/ polar silinder	
u	Kecepatan aliran darah dalam arah x	cm/s
v	Kecepatan aliran darah dalam arah y	cm/s
w	Kecepatan aliran darah dalam arah z	cm/s
v_r	Kecepatan aliran darah dalam arah radial	cm/s
v_θ	Kecepatan aliran darah dalam arah tangensial	cm/s
v_z	Kecepatan aliran darah dalam arah aksial	cm/s
e_r	Vektor satuan untuk kecepatan v_r	
e_θ	Vektor satuan untuk kecepatan v_θ	
e_z	Vektor satuan untuk kecepatan v_z	
V	Vektor kecepatan aliran darah	
F	Gaya yang berkerja pada elemen darah	N
m	Massa darah	g
a	Percepatan aliran darah	cm/s ²
F_s	Gaya pada permukaan darah	N
ρ	Densitas/kerapatan darah	g/cm ³
g	Percepatan gravitasi	cm/s ²
σ	Tegangan normal	N/cm ²

τ	Tegangan geser	N/cm^2
p	Tekanan aliran darah	Pa
μ	Viskositas/kekentalan darah	Pa/s
r_0	Jari-jari pembuluh darah konstan (tidak mengalami perubahan)	cm
$r(z)$	Jari-jari pembuluh darah yang mengalami perubahan	cm
α	Ketinggian maksimum pada perubahan jari-jari pembuluh darah	cm
$(-L, L)$	Interval panjang pembuluh darah	cm
l_0	Panjang pembuluh darah yang mengalami perubahan diameter	cm
Q	Laju aliran volume pada aliran darah	cm^3/s
\tilde{v}_r	Kecepatan aliran darah pada arah radial dalam bentuk variabel tak berdimensi	
\tilde{v}_z	Kecepatan aliran darah pada arah aksial dalam bentuk variabel tak berdimensi	
v_{r_0}	Kecepatan rata-rata aliran darah	
\tilde{r}	Jari-jari pembuluh darah dalam bentuk variabel tak berdimensi	
\tilde{z}	Panjang pembuluh darah dalam bentuk variabel tak berdimensi	
\tilde{p}	Tekanan aliran darah dalam bentuk variabel tak berdimensi	
o	Orde	
Re	Bilangan reynold	
β	Perbandingan panjang daerah yang mengalami perubahan dengan domain panjang pembuluh darah	
δ	Perbandingan jari-jari konstan dengan panjang daerah yang berubah diameter	

ε	Ketinggian maksimum pada perubahan jari-jari pembuluh darah dalam bentuk variabel tak berdimensi
$f(\tilde{z})$	Jari-jari pembuluh darah yang mengalami perubahan dalam bentuk variabel tak berdimensi
\tilde{Q}	Laju aliran volume pada aliran darah dalam bentuk variabel tak berdimensi
ψ	Fungsi arus

DAFTAR PUSTAKA

- Aaronson, P. I., Ward, J. P., & Connolly, M. J. (2020). *The Cardiovascular System at A Glance*. John Wiley & Sons.
- Ang, K. C., & Mazumdar, J. N. (1997). *Mathematical Modelling Of Three-Dimensional Flow Through An Asymmetric Arterial Stenosis*. *Mathematical and Computer Modelling*, 25(1), 19-29.
- Barrett, K. E., Barman, S. M., Boitano, S., Brooks, H. L. (2012). *Buku Ajar Fisiologi Kedokteran Ganong*. Edisi Bahasa Indonesia, Dian Ramadhani (Et Al). Ed, 24.
- Bender, C. M., & Orszag, S. (1999). *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.
- Calvez, V., Ebde, A., Meunier, N., & Raoult, A. (2009). *Mathematical Modelling Of The Atherosclerotic Plaque Formation*. In *Esaim: Proceedings* (Vol. 28, pp. 1-12). EDP Sciences.
- Chandra, T. D. (2002). Perturbation and operator methods for solving Stokes flow and heat flow problems. [Phd Thesis 1 (Research TU/e / Graduation TU/e), Mathematics and Computer Science]. Technische Universiteit Eindhoven. <https://doi.org/10.6100/IR554634>
- Coppel, W. A. (2009). *Number Theory: An introduction to mathematics*. Springer Science & Business Media.
- Dettman, J. W. (1973). *Perturbation Techniques In Related Differential equations*. *Journal of differential equations*, 14(3), 547-558.
- Hall, J. E. (2011). *Guyton and Hall textbook of medical physiology*. Philadelphia, PA: Saunders Elsevier, 107.
- Hasan, J. P. (2018). Analisis Numerik Aliran Darah pada Arteri Karotis Akibat Pemasangan Stent Menggunakan Metode Elemen Hingga untuk Mengasah Kemampuan TCK.
- Heiliö, M., Lähivaara, T., Laitinen, E., Mantere, T., Merikoski, J., Raivio, K., ... & Vauhkonen, M. (2016). *Mathematical modelling*. Springer.

- Hoskins, P. R., Hoskins, P. R., Lawford, P. V., Lawford, P. V., Doyle, B. J., & Doyle, B. J. (2017). *Cardiovascular Biomechanics*. Springer.
- Humayyun, I. F. *Analisis Numerik Aliran Darah Abdominal Aortic Aneurysm Menggunakan Metode Elemen Hingga*. (Doctoral dissertation).
- Mashuri, S. (2019). *Media Pembelajaran Matematika*. Deepublish.
- Mirza, A., Ansari, A. R., Siddiqui, A. M., & Haroon, T. (2013). On the steady two-dimensional flow of blood with heat transfer in the presence of a stenosis. *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*, 8(4), 149-158.
- Munson, B. R., Young, D. F., & Okiishi, T. H. (2003). *Mekanika Fluida Edisi Keempat*. Diterjemahkan oleh Harinaldi dan Budiarmo. Jakarta: Erlangga.
- Pritchard, P. J., & Mitchell, J. W. (2016). *Fox And Mcdonald's Introduction To Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons.
- Ramadhan, M. R., Yulianti, K., & Kustiawan, C. (2020). *Pemodelan Matematika Untuk Aliran Darah Dengan Tekanan Yang Berubah Secara Periodik*. *Jurnal EurekaMatika*, 9(1), 24-35.
- Ross, S. L. (2007). *Differential Equations*. John Wiley & Sons.
- Sankar, D. S., & Ismail, A. (2009). *Two-Fluid Mathematical Models For Blood Flow In Stenosed Arteries: A Comparative Study*. *Boundary Value Problems*, 2009, 1-15.
- Sahoo, S. K. (2014). *Some Perturbation Methods To Solve Linear And Non-Linear Differential Equation*. (Doctoral dissertation).
- Sherwood, L. (2010). *Introduction to Human Physiology 8th Ed International Ed*.
- Welty, J. R., Wicks, C. E., Wilson, R. E., & Rorer, G. L. (2004). *Dasar-Dasar Fenomena Transport Volume 1 Transfer Momentum*. Diterjemahkan oleh Gunawan Prasetio. Jakarta: Erlangga.